

N° D'ORDRE :

868

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. J. ROUGIER

AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PROFESSEUR AU LYCÉE DE TOULON

1^{re} THÈSE. — SUR QUELQUES SOUS-GROUPES DE 11^e CLASSE DU GROUPE MODULAIRE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 28 Février

1896, devant la Commission d'examen.

MM. HERMITE, *Président.*

APPELL

H. POINCARÉ

} *Examineurs.*

MARSEILLE

TYPOGRAPHIE ET LITHOGRAPHIE BARTHELET ET C^{ie}

Rue Venture, 19.

1896



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547114_0070

N° D'ORDRE :

868

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. J. ROUGIER

AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PROFESSEUR AU LYCÉE DE TOULON

1^{re} THÈSE. — SUR QUELQUES SOUS-GROUPES DE 11^e CLASSE DU GROUPE MODULAIRE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *28 Février* 1896, devant la Commission d'examen.

MM. HERMITE, *Président.*

APPELL

H. POINCARÉ

} *Examineurs.*

MARSEILLE

TYPOGRAPHIE ET LITHOGRAPHIE BARTHELET ET C^{ie}

Rue Venture, 19.

1896

ACADÉMIE DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

	MM.	
DOYEN	DARBOUX, professeur....	Géométrie supérieure.
	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST.....	Chimie.
	FRIEDEL.....	Chimie organique.
	TISSERAND.....	Astronomie.
	LIPPMANN.....	Physique.
	HAUTEFEUILLE.....	Minéralogie.
	BOUTY.....	Physique.
	APPELL.....	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ.....	Mécanique physique et expérimentale.
PROFESSEURS	PICARD.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ.....	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS.....	Géologie.
	GIARD.....	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF.....	Astronomie.
	CHATIN.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	JOLY.....	Chimie.
PROFESSEURS ADJOINTS	PELLAT.....	Physique.
	KOENIGS.....	Cinématique.
	PAINLEVÉ.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

A

MONSIEUR L. SAUVAGE

PROFESSEUR D'ANALYSE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

Hommage de respect,

J. ROUGIER

PREMIÈRE THÈSE

SUR

QUELQUES SOUS-GROUPES DE 11^e CLASSE DU GROUPE MODULAIRE

OBJET DE CE TRAVAIL

On sait que le problème de la transformation du onzième ordre des fonctions elliptiques admet deux résolvantes du onzième degré, signalées pour la première fois par Galois⁽¹⁾, et qui ont été l'objet de remarquables mémoires, entre autres de la part de MM. Betti et Hermite⁽²⁾. Dans le domaine des fonctions modulaires elliptiques, ces résolvantes prennent une forme très simple, étudiée par M. Klein, qui l'a découverte (*Über Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen*, *Math. Annalen*, vol. XV). Si l'on

(1) GALOIS. Lettre à M. Chevalier, *Revue encyclopédique de 1832*, ou Œuvres complètes, *Journal de Liouville*, vol. II (1846).

(2) BETTI. « Sopra l'abbassamento della equazione modulari delle funzione ellittiche », *Annales de Tortolini*, vol. III (1853).

HERMITE. « Sur la théorie des équations modulaires », Paris (1859). (*Comptes-rendus*, tom. XLIX).

désigne par J l'invariant absolu de l'intégrale elliptique de première espèce, par ω le rapport des périodes, et par τ une fonction uniforme de ω convenablement choisie, ces résolvantes se présentent sous la forme

$$J = \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)},$$

où Φ et Ψ sont des polynomes en τ du onzième degré.

Considérons l'une de ces résolvantes. Si l'on construit sur le plan des J la surface de Riemann à onze feuillets qui répond à la fonction algébrique τ , cette surface aura une ramification caractéristique. Au point $J=0$, sur les onze feuillets deux seront isolés, les neuf autres formeront trois cycles chacun du troisième ordre; au point $J=1$, on aura trois feuillets isolés et quatre cycles du deuxième ordre; enfin au point $J=\infty$, les onze feuillets se réuniront et formeront un cycle unique.

Nous montrerons dans la suite qu'il y a *dix* surfaces de Riemann construites sur le plan des J et ayant la même ramification; elles sont toutes du genre 0; et, d'après les théories de M. Klein, il leur correspond dix systèmes de sous-groupes du groupe modulaire. Nous nous proposons d'étudier ici ces sous-groupes et les modules qui en dépendent.

Des dix systèmes de sous-groupes en question, les deux systèmes de sous-groupes qu'on rencontre dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques sont bien connus; quant aux huit autres, les substitutions qui composent un groupe particulier de l'un des systèmes ne peuvent être caractérisées par des procédés arithmétiques qui dépendent de la théorie des congruences; et l'étude des modules correspondants paraît d'autant plus difficile qu'on ne peut plus employer ici les moyens si simples dont la théorie de la transformation et celle des congruences ont permis de disposer dans tous les exemples particuliers, étudiés jusqu'à ce jour, de sous-groupes du groupe modulaire.

Ce travail comprend deux parties : dans la première sont exposées les théories générales indispensables pour l'étude du problème que l'on s'est posé, c'est-à-dire les théories de M. Klein sur les sous-groupes du groupe modulaire et les fonctions qui en dépendent ; la seconde partie a pour objet la détermination des dix surfaces de Riemann que l'on se propose de considérer et l'étude des sous-groupes et des modules correspondants.

CHAPITRE I

SUR LA DÉFINITION DES SOUS-GROUPES DU GROUPE MODULAIRE ET DES FONCTIONS MODULAIRES CORRESPONDANTES

La matière de ce chapitre est tirée entièrement du bel ouvrage de M. Klein, rédigé et publié par M. Robert Fricke : *Vorlesungen über die elliptischen Modulfunctionen* (Teubner, Leipzig, 1892).

Dans la première partie de ce chapitre (§ 2 à § 15) je m'occupe des sous-groupes du groupe modulaire et de l'étude de leurs propriétés ; j'ai dû supposer connues, pour l'exposition de ces belles théories, les propriétés fondamentales du groupe et de la division modulaires, propriétés que je rappelle d'ailleurs brièvement au début du § 1. J'ai systématiquement laissé de côté dans ce qui suit tous les développements relatifs à la symétrie des sous-groupes du groupe modulaire. L'objet de la seconde partie du chapitre (§ 15 à § 18) est la définition des fonctions qui appartiennent à un sous-groupe donné, définition obtenue à l'aide de la théorie des fonctions algébriques fondée sur l'emploi des surfaces de Riemann.

J'ai conservé partout le mode d'exposition et de démonstration de M. Klein, et j'ai indiqué, dans tous les cas où cela était nécessaire, la partie correspondante de l'ouvrage de M. Klein.

§ 1. — *Le groupe modulaire et la division modulaire correspondante.*

On sait que l'intégrale elliptique de première espèce possède deux périodes dont le rapport ω est fonction de la variable indépendante J ,

invariant absolu de l'intégrale elliptique considérée; ω est une fonction analytique de J , définie par une équation différentielle du troisième ordre, dont les coefficients sont fonctions rationnelles de J ; ω a une infinité de déterminations, et ses différentes branches sont données par la formule $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, ω représentant l'une quelconque d'entre elles, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre entiers quelconques tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Les points de ramification de la fonction ω sont situés aux points $J=0, 1, \infty$, et, par rotation autour de l'un de ces points, la branche initiale ω se transforme dans les branches suivantes :

pour $J=\infty$, $\omega' = \omega + 1$. (S) ; pour $J=1$, $\omega' = \frac{-1}{\omega}$. (T);

pour $J=0$, $\omega' = \frac{\omega+1}{-\omega}$ (U) , ou $\omega' = \frac{1}{-\omega+1}$. (U⁻¹).

selon le sens de la rotation.

Les substitutions linéaires $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ forment évidemment un groupe Γ ; ce groupe est le groupe *modulaire*. Ce groupe a pour substitutions génératrices les deux premières substitutions ci-dessus que nous désignons par les lettres S et T :

$$S : \omega' = \omega + 1 ; \quad T : \omega' = \frac{-1}{\omega} .$$

La fonction $J(\omega)$, au contraire, est une fonction uniforme de ω qui demeure invariable lorsqu'on emploie sur son argument ω une substitution modulaire de déterminant 1, et qui n'existe que dans le demi plan des ω .

Si l'on cherche la représentation conforme du plan des J sur le plan des ω par l'intermédiaire des différentes branches de la fonction ω , on obtient une division en triangles de l' ω demi plan positif qui jouit des propriétés suivantes :

Considérons dans le plan de la variable imaginaire ω le triangle curviligne d'angles $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ et de sommets $i\infty, \rho, i$, dont les côtés

sont respectivement : le cercle unité du plan des ω , la droite $x = 0$, et la droite $x = -\frac{1}{2}$ (si l'on pose $\omega = x + yi$).

Construisons le triangle curviligne symétrique de ce premier triangle par rapport à chacun de ses trois côtés, en appelant figure symétrique d'une figure donnée F par rapport à un cercle C la figure F' transformée de F par rayons vecteurs réciproques, le centre et le carré du rayon du cercle C étant respectivement l'origine et la puissance de la transformation. Nous obtenons ainsi trois nouveaux triangles curvilignes ; les triangles symétriques de ces triangles par rapport à chacun de leurs côtés donnent naissance à de nouveaux triangles curvilignes ; et, l'application de ce procédé de formation de triangles curvilignes nouveaux à chacun des triangles obtenus en dernier lieu conduit à recouvrir le demi plan positif des ω d'un réseau de triangles, en nombre infini ; ce réseau de triangles constitue la *division modulaire* ; cette division modulaire est identique avec la division triangulaire obtenue par la représentation conforme du plan des J sur le plan des ω . Les triangles de la division modulaire, limités par des cercles en nombre infini orthogonaux à l'axe des quantités réelles, sont tous congrus ou symétriques entre eux ; la division modulaire tout entière est d'ailleurs symétrique d'elle-même, par rapport à l'un quelconque des cercles qui en font partie, la symétrie étant entendue dans le sens précisé plus haut.

Les triangles de la division recouvrent une seule fois et sans lacune le demi plan positif des ω , deux triangles adjacents quelconques ne pouvant empiéter l'un sur l'autre.

Nous désignons dans ce qui suit sous le nom de *triangle élémentaire* l'un quelconque des triangles de la division ainsi obtenue.

La représentation conforme du plan des J , réalisée par une branche particulière de la fonction ω , se compose alors de deux triangles élémentaires symétriques l'un de l'autre par rapport au côté commun qui joint les deux sommets d'angles $0, \frac{\pi}{2}$; l'un de ces triangles est la représentation conforme du demi plan positif des J , l'autre du demi plan négatif. Dans la suite, nous imaginons recouverts de hachures les triangles qui réalisent la représentation conforme du demi plan

positif des J ; de sorte que la division obtenue se composera d'une infinité de triangles alternativement blancs et ombrés et disposés d'une manière caractéristique autour de leurs sommets.

Autour d'un sommet d'angle $\frac{\pi}{3}$ seront disposés six triangles élémentaires ; pour un sommet d'angle $\frac{\pi}{2}$ les triangles élémentaires sont au nombre de quatre ; et, pour un sommet d'angle nul, ils sont en nombre infini.

La figure formée par deux triangles élémentaires adjacents, l'un blanc, l'autre ombré symétriques l'un de l'autre par rapport au côté commun qui joint les sommets d'angles respectifs 0 et $\frac{\pi}{2}$, est un triangle curviligne d'angles $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$ qui réalise la représentation

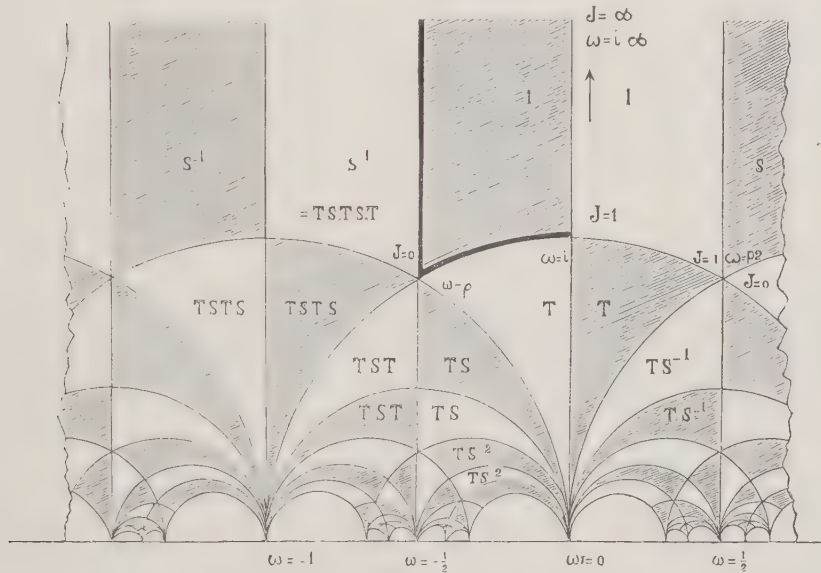


Fig. 1.

conforme du plan total des J par l'une des branches de la fonction ω . Un triangle de cette nature sera appelé *double triangle* de la division modulaire.

J'ai représenté dans la fig. 1 ci-dessus quelques triangles élémentaires de la division modulaire ; cette figure suffit pour donner une idée nette de ce qu'est la division modulaire.

Un *double triangle* quelconque jouit de la très remarquable propriété suivante : on peut toujours y trouver un point ω , et un seul, *équivalent* à un point quelconque ω du demi plan positif des ω , par rapport au groupe modulaire, c'est-à-dire tel que l'on ait

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre entiers quelconques de déterminant 1.

Tout double triangle constitue alors un *polygone fondamental* du groupe modulaire Γ . D'après cela, le demi plan positif des ω est susceptible d'être divisé en une infinité de doubles triangles qui pourront fonctionner comme *polygones fondamentaux* du groupe Γ .

Parmi tous ces doubles triangles, on choisit généralement comme *polygone fondamental* du groupe modulaire le triangle qui est limité par les deux droites $x = \pm \frac{1}{2}$ et par le cercle unité du plan (fig. 1). Pour que le triangle ainsi défini soit effectivement un polygone fondamental du groupe Γ , on ne doit lui attribuer parmi les points de son périmètre que ceux placés sur les segments de ce périmètre tracés en gros traits sur la figure. Ce triangle étant désigné par 1, on désignera par V le double triangle dans lequel le triangle 1 sera transformé par l'effet de la substitution modulaire $V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$. Les triangles adjacents au triangle 1, étant d'après

cette règle désignés par S, S^{-1} , T, où $S(\omega) = \omega + 1$, $T(\omega) = \frac{-1}{\omega}$, les triangles adjacents à un double triangle quelconque V porteront les noms VS, VS^{-1} , VT ; cette remarque permet d'obtenir facilement le nom à attribuer à un double triangle quelconque du plan.

Tous les points de la division modulaire ainsi définie où se croisent quatre triangles élémentaires sont équivalents par rapport au groupe modulaire avec le point i du triangle 1 ; ceux entourés de six triangles élémentaires sont équivalents avec le sommet ρ de ce

triangle; et les points sommets de triangles pour lesquels l'angle correspondant est nul, sont équivalents avec le sommet $\omega = i\infty$ du triangle fondamental 1.

En tous les points équivalents avec i , J a la valeur 1, et l'on a, dans le voisinage d'un tel point, le développement en série :

$$J - 1 = a(\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

Pour les points équivalents avec ρ , $J = 0$, et, dans leur voisinage on a :

$$J = a(\omega - \omega_0)^3 + \dots$$

Enfin, pour un point rationnel réel, $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$, J est infini logarithmique, et l'on a :

$$J = \frac{1}{1728} e^{-2\pi i \frac{-\gamma\omega + \beta}{\gamma\omega - \alpha}}$$

§ 2. — Les sous-groupes du groupe modulaire et les fonctions modulaires correspondantes.

Le groupe modulaire Γ contient une infinité de sous-groupes. Imaginons l'un de ceux-ci Γ' . Soient $1, v_1, v_2, \dots$ les opérations de Γ' ; Γ' étant contenu dans Γ , la théorie générale des groupes nous apprend que les opérations de Γ peuvent se ranger dans un tableau

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & , & v_1 & , & v_2 & , & v_3 & , & \dots \\ V_1 & , & v_1 V_1 & , & v_2 V_1 & , & v_3 V_1 & , & \dots \\ V_2 & , & v_1 V_2 & , & v_2 V_2 & , & v_3 V_2 & , & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

construit de la manière suivante : dans la première ligne figurent les substitutions du groupe Γ' tandis que la substitution V qui se présente dans chaque nouvelle ligne est une substitution de Γ qui ne figurait pas dans les lignes précédentes. Deux cas se présentent : ou bien le nombre des lignes du tableau est infini, ou bien

il est fini, et alors il est indépendant du choix des V ; ce cas seul nous intéresse. Le nombre des lignes qui indique en quelque sorte quelle est la fraction de la totalité des substitutions modulaires qui constitue le groupe Γ' s'appelle l'*indice* du groupe Γ' . Soit μ cet indice; on désignera désormais un groupe d'indice μ par la notation Γ_μ .

De même que par les substitutions de Γ la fonction $J(\omega)$ demeurerait entièrement invariable, il existe des fonctions uniformes de ω qui demeurent invariables lorsqu'on effectue sur leur argument les substitutions du groupe Γ_μ ; ces fonctions sont évidemment des fonctions de J ; et, parmi elles, il en est de particulièrement intéressantes; ce sont celles qui sont fonctions algébriques de J . L'une quelconque d'entre elles est liée à J par une équation algébrique irréductible qui constitue, dans le sens de la théorie de Galois, une *résolvante* de l'équation modulaire. L'équation modulaire est l'équation qui permet de calculer les valeurs de ω qui répondent à une valeur donnée de J . Ces valeurs de ω sont, comme on sait, en nombre infini et s'expriment linéairement à l'aide de l'une quelconque d'entre elles; de sorte que l'équation modulaire est sa propre résolvante de Galois ⁽¹⁾.

§ 3. — *Système de substitutions représentantes et domaine fondamental d'un sous-groupe Γ_μ d'indice μ* ⁽²⁾.

Nous nous proposons dans ce qui suit d'établir l'existence de ces fonctions modulaires algébriques. A cet effet, nous devons étudier de plus près la définition des sous-groupes du groupe modulaire et établir sur eux d'importantes propositions.

(1) On dit qu'une équation algébrique entière est sa propre résolvante de Galois, lorsque toutes ses racines s'expriment rationnellement en fonction de l'une quelconque d'entre elles; on étend sans peine cette définition aux équations transcendentes. Voir Klein-Fricke, *Vorlesungen*, vol. I, page 130 et suivantes.

(2) Pour les paragraphes 3 à 9 inclus, voir Klein-Fricke, *Vorlesungen*, chap. v, II^{me} partie, vol. I.

Considérons maintenant dans la division modulaire deux points équivalents, ou deux doubles triangles équivalents par rapport au groupe Γ_μ , d'indice fini μ , qui seront transformés l'un dans l'autre par une substitution v_k de Γ_μ , nous dirons qu'ils sont *équivalents relatifs par rapport à Γ_μ* , ou simplement *équivalents relatifs*. Nous allons montrer qu'il existe pour Γ_μ un *polygone fondamental*, c'est-à-dire un polygone tel qu'on n'y peut trouver *qu'un point et un seul équivalent relatif* avec un point *quelconque du demi plan positif des ω* .

Ce domaine polygonal se composera de 2μ triangles élémentaires de la division modulaire et sera simplement connexe. Nous le désignons dans la suite par F_μ .

Nous pouvons supposer que le domaine F_μ contient le double triangle 1. Ce dernier est entouré de trois doubles triangles de la division modulaire ; ils ne sont pas tous *équivalents relatifs* avec le triangle 1, sans quoi Γ_μ contiendrait les substitutions S et T et coïnciderait avec le groupe modulaire Γ . Choisissons l'un de ceux-ci V_1 , et formons à l'aide de V_1 et 1 un ensemble de deux doubles triangles. Dans la chaîne des doubles triangles qui entourent cet ensemble, choisissons un troisième double triangle qui n'est équivalent relatif ni avec 1, ni avec V_1 ; et réunissons-le (si toutefois on peut trouver un tel triangle) aux deux premiers triangles 1, V_1 pour former un ensemble continu de trois doubles triangles ; nous continuons ainsi en réunissant aussi longtemps qu'il est possible à la figure obtenue tout triangle adjacent à cette figure et qui n'est pas équivalent relatif avec l'un quelconque des doubles triangles de l'ensemble obtenu en dernier lieu. L'application de ce procédé doit nécessairement prendre fin ; car, pour notre sous-groupe Γ_μ d'indice fini μ , on peut trouver au plus μ doubles triangles, dont deux quelconques ne soient pas équivalents relatifs. Si nous avons obtenu de la manière indiquée un ensemble de $\mu_0 \leq \mu$ doubles triangles formant un polygone curviligne P, tout double triangle D_e adjacent extérieurement à P sera équivalent relatif avec un double triangle D_i , situé à l'intérieur du polygone P. Mais on remarque de plus que D_i sera nécessairement placé sur le périmètre de P ; car un des

doubles triangles adjacents à D_e appartient à P et est équivalent relatif à un triangle adjacent à D_i qui ne peut appartenir à P . Donc D_i aura un de ses côtés qui fera partie du périmètre de l'ensemble P et qui sera équivalent relatif avec un autre arc de cercle limite de P appartenant au double triangle D_e . *Les courbes limites de l'ensemble des triangles sont donc conjuguées deux à deux, deux courbes limites conjuguées étant équivalentes relatives.* Ce théorème n'implique pas nécessairement que le nombre des courbes limites soit pair ; car il peut arriver qu'une courbe limite soit conjuguée à elle-même, comme nous le verrons plus loin. Nous déterminerons notre domaine P d'une manière encore plus précise en n'attribuant à ce domaine que les points de l'une des deux courbes qui forment un couple de courbes conjuguées.

On reconnaît maintenant facilement que l'ensemble ainsi construit est un *domaine fondamental* du groupe Γ_μ . En effet, on ne peut y trouver deux points équivalents relatifs ; deux points de cette nature devraient être situés en des positions homologues de deux doubles triangles, qui seraient dès lors équivalents relatifs dans toute leur étendue. Si les points considérés n'étaient pas sur le périmètre du polygone P , ces deux doubles triangles appartiendraient à l'ensemble P contrairement à la définition donnée pour celui-ci. Il semble qu'il y aura exception pour les points situés sur le périmètre de P ; ils sont bien équivalents relatifs deux à deux ; mais, comme des points de deux courbes limites conjuguées on n'attribue à P que les points d'une seule courbe limite, la proposition est générale.

De plus, on peut toujours trouver dans le dit ensemble P un point équivalent relatif avec un point quelconque ω du demi plan positif. Traçons, en effet, à partir d'un point quelconque ω_0 du polygone P une ligne L contenue tout entière dans le demi plan positif des ω , se terminant au point ω et parcourons là à partir du point ω_0 . Une première partie de cette ligne L est située dans P ; nous franchissons la limite de celui-ci en un certain point déterminé et nous pénétrons dans le triangle adjacent extérieurement à P , D_e (il s'agit ici de doubles triangles, comme dans tout ce qui suit) ; ce double

triangle D_e est équivalent relatif avec un double triangle D_i de l'ensemble; pour la partie suivante du chemin, nous pouvons trouver un chemin équivalent relatif qui traverse d'abord ce triangle D_i , ensuite une série d'autres doubles triangles de la division modulaire. Si nous imaginons les deux chemins parcourus simultanément, le dernier, cheminant à l'intérieur du polygone P , franchira de nouveau la limite de celui-ci en une nouvelle position, pour pénétrer maintenant dans un nouveau double triangle extérieurement adjacent à $P : D'_e$. D'_e est équivalent relatif avec le double triangle D'_i de P . Si nous continuons donc à nous déplacer sur la ligne L , nous pouvons remplacer la portion de celle-ci que nous parcourons par un chemin équivalent relatif également extérieur à P traversant en premier lieu D'_e , et, par suite, évidemment en un chemin équivalent relatif intérieur à P et traversant en premier lieu le triangle D'_i de P . Nous poursuivons ainsi la réduction successive des différentes parties de L à un chemin tracé à l'intérieur de P . Nous voyons maintenant sans peine comment se terminera ce raisonnement. Le chemin primitif allant de ω_0 à ω ne traverse qu'un nombre fini de doubles triangles modulaires, car il ne rencontre pas l'axe des quantités réelles. Il se transforme donc en un nombre fini de lignes équivalentes relatives avec les morceaux qui le composent, lignes qui traversent l'ensemble P . La dernière de ces lignes se terminera en un point ω' , lorsque sur le chemin extérieur L , on aura atteint le point ω ; ce point ω' , situé à l'intérieur du polygone P , est donc équivalent relatif avec ω .

Le nombre désigné plus haut par μ_0 coïncide avec l'indice μ du sous-groupe. En effet, le polygone P doit contenir un double triangle équivalent relatif avec un double triangle quelconque de la division modulaire. Mais les substitutions qui correspondent à des doubles triangles relatifs équivalents sont évidemment rangées dans la même ligne du tableau (A). Donc μ_0 ne peut être inférieur à μ . Comme il est au plus μ , on a $\mu_0 = \mu$. Le polygone P se confond donc avec le polygone F_μ défini plus haut. Nous pourrions choisir les μ substitutions dont les doubles triangles composent le domaine fondamental ainsi construit, pour former le système des *substitutions représentantes* du groupe Γ_μ .

D'après sa forme, le domaine fondamental F_μ ainsi obtenu est un polygone curviligne limité par des arcs de cercle conjugués deux à deux. La forme de ce polygone est arbitraire à un haut degré; en effet on peut toujours détacher du domaine un morceau placé sur le pourtour de celui-ci et le remplacer par le morceau transformé de celui qui a été détaché par les substitutions relatives aux portions de courbes limites qui terminent ce dernier. Les deux bords de la coupure à l'aide de laquelle on a détaché le morceau en question, donnent pour la nouvelle forme du domaine fondamental, deux courbes limites conjuguées. Une pareille opération s'appellera *déformation permise* (erlaubte Abänderung). Elle est appliquée la plupart du temps à des morceaux formés d'un certain nombre de triangles complets (1), de telle sorte qu'après une telle opération les limites du polygone fondamental sont encore figurées par des cercles.

Les considérations qui précèdent s'appliquent d'ailleurs au cas où le groupe est d'indice infini. Le polygone fondamental obtenu a alors une infinité de côtés.

§ 4. — *Division du plan des ω en polygones qui correspondent au sous-groupe Γ_μ . Génération de Γ_μ .*

Supposons construit un polygone fondamental F_μ pour le sous-groupe Γ_μ , se composant de 2μ triangles élémentaires. Par une substitution v_k du sous-groupe Γ_μ , F_μ sera transformé en un nouveau polygone $F_\mu^{(k)}$. Imaginons la totalité des polygones $F_\mu^0 = F_\mu$, $F_\mu^{(1)}$, $F_\mu^{(2)}$, ... du demi plan ω qui correspondent aux substitutions du sous-groupe Γ_μ . Comme F_μ représente un domaine fondamental pour Γ_μ , une conséquence immédiate de la définition du polygone

(1) Il faut entendre par là que la ligne qui séparera la partie conservée de la partie détachée se composera d'un certain nombre de côtés de doubles triangles, ces côtés étant pris dans leur totalité; ce qui revient à détacher du polygone F_μ un nombre entier de triangles élémentaires.

fondamental est la suivante : ces polygones $F_{\mu}^{(k)}$ recouvrent le demi plan ω positif une seule fois, entièrement et sans lacune, sans empiéter les uns sur les autres.

Désignons l'un des polygones en question par la substitution v_k à l'aide de laquelle on l'a déduit de F_{μ} ; nous considérons en particulier les polygones qui entourent le polygone 1 ou F_{μ} . Soit m le nombre de ces polygones, m étant fini pour les sous-groupes d'indice fini, infini pour les autres. Nous imaginons les m opérations du sous-groupe relatives à ces polygones désignées par $v_1, v_2, \dots, v_m$ et rangées dans les substitutions de Γ_{μ} à la première place à la suite de l'opération identique $v_0 = 1$. Le polygone $v_i = F_{\mu}^{(i)}$ a en commun avec le polygone $F_{\mu} = 1$ une courbe limite. La substitution v_i transformera donc une autre courbe limite déterminée de F_{μ} dans la dite courbe limite, et ces courbes limites seront équivalentes relatives entre elles. De là résulte que : *Les m substitutions $v_1, v_2, \dots, v_m$ sont celles qui réalisent l'équivalence relative des courbes limites conjuguées de F_{μ} ; parmi ces substitutions à côté d'une substitution v_i se trouve aussi toujours la substitution inverse v_i^{-1} .*

Soit maintenant v l'un quelconque des polygones avec lesquels nous avons recouvert le demi plan des ω ; il est entouré de m autres polygones. Il est manifeste que si l'on désigne ces polygones par les substitutions de Γ_{μ} qui permettent de les déduire du polygone 1, les noms de ces polygones seront $vv_1, vv_2, \dots, vv_m$. Si donc l'on passe du polygone 1 aux polygones voisins, on sera conduit à attribuer à ces derniers des noms qui se mettront sous la forme d'un produit de substitutions $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_r}$, où $i_1, i_2, i_3, \dots, i_r$ sont des nombres de la suite 1, 2, ... m . D'autre part par le passage d'un polygone aux polygones adjacents on peut parvenir à un polygone quelconque. On a donc ce théorème : *toute opération du groupe Γ_{μ} est une combinaison des m opérations $v_1, v_2, \dots, v_m$; ces m substitutions constituent dès lors un système de substitutions génératrices du groupe Γ_{μ} . Ce nombre m de substitutions génératrices est fini pour les sous-groupes d'indice fini ; pour ceux d'indice infini il est en général infini.*

§ 5. — *Sous-groupes semblables et sous-groupes invariants.*

Soit un sous-groupe Γ_μ . Transformons-le par une substitution modulaire V de première espèce ⁽¹⁾. A cet effet nous formons les substitutions $v'_k = V^{-1}v_kV$, v_k étant l'une quelconque des substitutions de Γ_μ ; les substitutions v'_k forment de nouveau un groupe, qu'on peut appeler Γ'_μ , qui, lorsqu'on fait correspondre v'_k à v_k , est *isomorphe holoédrique* ⁽²⁾ à Γ_μ . On dit que Γ'_μ *résulte de Γ_μ par transformation au moyen de V* : $\Gamma'_\mu = V^{-1}\Gamma_\mu V$, et que Γ_μ et Γ'_μ sont *semblables dans le groupe total Γ* .

Si v_k est une substitution du groupe Γ_μ , on a évidemment $v_k^{-1}\Gamma_\mu v_k = \Gamma_\mu$; c'est la définition même d'un groupe. Mais de plus on a :

$$(v_k V_i)^{-1} \Gamma_\mu (v_k V_i) = V_i^{-1} v_k^{-1} \Gamma_\mu v_k V_i = V_i^{-1} (v_k^{-1} \Gamma_\mu v_k) V_i = V_i^{-1} \Gamma_\mu V_i,$$

V_i étant l'une quelconque des substitutions représentantes choisies pour le groupe Γ_μ . Nous obtiendrons donc tous les sous-groupes de Γ semblables à Γ_μ en employant pour la transformation les μ substitutions du système des substitutions représentantes de Γ_μ . *Le nombre ν des sous-groupes semblables à Γ_μ , y compris Γ_μ lui-même, est au plus égal à μ* . Soient $\Gamma_\mu, \Gamma'_\mu, \dots, \Gamma_{\mu}^{(\nu-1)}$ ces groupes.

Un cas exceptionnel est celui où le sous-groupe Γ_μ n'est semblable qu'avec lui-même. Il est transformé en lui-même par toute substitution modulaire de première espèce; toute substitution modulaire de première espèce est alors permutable avec le

(1) Par substitution modulaire de première espèce on entend une substitution de la forme $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des entiers quelconques tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Pour la définition des substitutions modulaires de deuxième espèce, voir Klein-Fricke, *Vorlesungen*, page 196 et suivantes, vol. I.

(2) Pour la définition de l'isomorphisme des groupes, voir Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, page 56.

groupe Γ_μ ; car la relation ci-dessus $\Gamma'_\mu = V^{-1}\Gamma_\mu V$ devient dans le cas actuel $V\Gamma_\mu = \Gamma_\mu V$. On dit d'un tel groupe qu'il est *invariant* ⁽¹⁾ dans le groupe modulaire Γ . Pour reconnaître qu'un groupe est invariant dans le groupe modulaire il suffit évidemment de reconnaître qu'il est permutable avec les substitutions génératrices S et T du groupe Γ .

Occupons-nous maintenant des polygones fondamentaux d'un système de groupes semblables dans le groupe modulaire.

Soit Γ_μ un sous-groupe d'indice fini F_μ , son polygone fondamental se composant de μ doubles triangles $1, V_1, V_2, \dots, V_{\mu-1}$. Sur F_μ employons la substitution V_i^{-1} qui ramène le double triangle du polygone F_μ au double triangle 1. Soit $F_\mu^{(i)}$ le domaine prenant ainsi naissance. La correspondance des courbes limites de F_μ n'aura pas subi de changement par cette opération, c'est-à-dire que dans $F_\mu^{(i)}$ on conjuguera l'une à l'autre deux courbes limites déjà conjuguées dans leurs positions initiales sur le périmètre de F_μ . Soient K' et K deux courbes limites conjuguées de F_μ ; on aura $K' = v_k(K)$, où k est un nombre de la suite $1, 2, 3, \dots, m$. Par l'effet de V_i^{-1} , K se transforme en $K_1 = V_i^{-1}(K)$ et K' en $K'_1 = V_i^{-1}(K')$. Comme relation entre K'_1 et K_1 on a donc :

$$K'_1 = V_i^{-1}v_k V_i(K_1),$$

de sorte que les substitutions $v'_k = V_i^{-1}v_k V_i$ ($k = 1, 2, \dots, m$) sont celles qui transforment les unes dans les autres les courbes limites de $F_\mu^{(i)}$. Mais ce sont précisément là les génératrices du groupe $\Gamma'_\mu = V_i^{-1}\Gamma_\mu V_i$ semblable à Γ_μ ; de sorte que $F_\mu^{(i)}$ est un polygone fondamental de ce Γ'_μ . Par l'effet des μ substitutions V_i^{-1} , nous obtenons donc à l'aide du polygone F_μ du sous-groupe Γ_μ les polygones fondamentaux de tous les sous-groupes semblables avec Γ_μ dans le groupe modulaire.

Si Γ_μ est transformé en lui-même par V_i^{-1} , on pourra transformer $F_\mu^{(i)}$ en F_μ , en employant des *déformations permises*. Le polygone

(1) Je traduis par *invariant* le mot « ausgezeichnet » introduit par M. Lie dans la théorie des groupes.

fondamental F_μ d'un sous-groupe invariant Γ_μ de Γ sera donc transformé en lui-même, à des déformations permises près, par les μ substitutions V_i^{-1} , et ainsi par toutes les substitutions modulaires. Un polygone fondamental de cette nature est appelé *régulier*.

§ 6. — *Du groupe G_μ qui correspond à un sous-groupe invariant Γ_μ .*

Considérons un sous-groupe *invariant* et le tableau analogue au tableau (A) qui lui correspond. Considérons, dans deux lignes horizontales du tableau caractérisées par les substitutions représentantes V_i, V_k , deux substitutions quelconques $v_i V_i, v_h V_k$ et combinons-les entre elles dans un ordre déterminé; la substitution qui prend naissance est dans une certaine ligne du tableau. Soit u cette substitution; on a $u = v_i V_i v_h V_k$. Mais, Γ_μ étant un groupe invariant dans Γ , on aura $V_i v_h = v_g V_i, v_g$ étant une substitution de Γ_μ , et, par suite, $u = v_i v_g V_i V_k = v_m V_i V_k, v_m$ étant une substitution du groupe Γ_μ . Mais si d'autre part nous calculons $V_i V_k$, nous aurons $V_i V_k = v_n V_j$, et par suite $u = v_m v_n V_j = v_p V_j$.

La valeur de j ne dépend évidemment que des valeurs de i et k . Donc, si l'on combine dans un ordre déterminé deux substitutions quelconques de deux lignes horizontales déterminées du tableau (A), on obtient une substitution qui appartient à une troisième ligne déterminée du tableau. Cette troisième ligne n'est d'ailleurs pas nécessairement différente des deux autres.

Regardons maintenant comme non distinctes les opérations du sous-groupe Γ_μ , ce que nous exprimons par le signe d'équivalence : $v_g \cup v_h$, employé par M. Klein. Nous avons la conséquence immédiate $v_g V_i \cup v_h V_i$. Grâce à cette convention, les opérations d'une même ligne du tableau ne sont pas différentes, et nous avons le théorème : *si nous regardons comme non distinctes les opérations du sous-groupe Γ_μ invariant dans Γ les opérations de Γ se réduisent à μ opérations seulement.*

Pour ces μ opérations nous choisirons dans chacune des horizon-

tales du tableau une substitution quelconque; nous obtiendrons ainsi le système des substitutions $V'_0, V'_1, \dots, V'_{\mu-1}$. On a alors (1) $V'_i V'_k \cap V'_j$, et nous pourrions exprimer le théorème établi au début du paragraphe en disant *qu'aux deux nombres i et k qui figurent dans (1) est conjugué de la manière indiquée plus haut le nombre j , absolument indépendant du choix des substitutions V'* . Nous choisirons en conséquence désormais pour substitutions V'_i les μ substitutions modulaires qui correspondent aux μ doubles triangles du domaine fondamental F_μ , de sorte que $V'_i = V_i$ et $V'_0 = V_0 = 1$.

On pourra maintenant interpréter d'une manière précise la formule symbolique $V_i V_k \cap V_j$, en disant que *les μ opérations symboliques $1, V_1, V_2, \dots, V_{\mu-1}$ représentent, en vertu de la convention faite, un groupe G_μ dont l'ordre coïncide avec l'indice de son groupe invariant Γ_μ , et qui ainsi est fini ou infini*. D'ailleurs la première proposition établie au début du paragraphe nous apprend que ce groupe G_μ est isomorphe au groupe modulaire Γ ; il suffit, en effet, de faire correspondre à l'opération particulière de G_μ dont le symbole est V_i les substitutions modulaires contenues dans la $(i + 1)^{\text{me}}$ ligne horizontale du tableau. L'isomorphisme de G_μ et de Γ est ainsi de *mériédrie* infiniment élevée.

§ 7. — *Transformation du domaine fondamental F_μ en une surface fermée. Genre p d'un sous-groupe Γ_μ .*

Imaginons le polygone fondamental F_μ d'un sous-groupe Γ_μ déterminé d'une manière quelconque, et découpons-le dans le plan des ω le long de ses courbes limites. Les courbes limites du domaine simplement connexe ainsi isolé sont conjuguées deux à deux. Nous imaginons maintenant une déformation de F_μ exécutée dans l'espace à trois dimensions et par laquelle les courbes limites conjuguées seront rapprochées l'une de l'autre de manière que finalement elles soient amenées

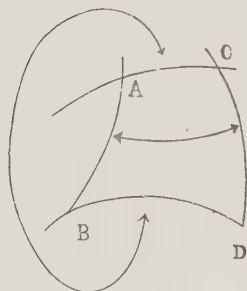


Fig. 2.

en coïncidence, de telle façon que deux points du périmètre de F_μ équivalents relatifs avant la déformation coïncident après. Considérons par exemple un polygone fondamental ayant la forme d'un quadrilatère ABCD (fig. 2), les arêtes AB et CD étant conjuguées ainsi que AD et BC. Par jonction de AB et CD, on peut transformer ce polygone en une sorte de cylindre ouvert aux deux bouts et limité par deux courbes fermées provenant des arêtes AD et BC. L'application de ces courbes l'une sur l'autre réalise la surface fermée correspondante dont la forme rappelle celle du tore. Dans le cas général, nous n'imposons d'ailleurs au procédé de transformation qu'une seule condition : la déformation doit s'effectuer d'une manière continue. Il est bien entendu que les différentes nappes de la surface se traverseront, s'il est nécessaire. La surface fermée que nous obtiendrons dans le cas général sera arbitraire à un haut degré, mais il est inutile de faire sur la forme de la surface des hypothèses la fixant d'une manière plus précise ; l'usage qu'on doit en faire n'en souffre nullement. *On a, d'après le procédé indiqué, construit à l'aide d'un polygone fondamental F_μ une surface évidemment fermée φ_μ qui porte une division en 2μ triangles élémentaires alternativement blancs et ombrés.*

Pour obtenir la surface φ_μ on peut partir d'une forme particulière quelconque du polygone F_μ dans l' ω demi plan. En effet, considérons sur la surface les lignes qui prennent naissance par la juxtaposition des courbes limites du polygone. Nous pourrions concevoir manifestement celles-ci comme un système de coupures de la surface, système par lequel la surface sera transformée en surface simplement connexe. Mais alors une déformation permise, exécutée dans le plan des ω sur le polygone F_μ , revient au remplacement du système de coupures par un autre système, opération qui n'apporte à la surface φ_μ aucun changement.

Nous allons étudier maintenant quel est l'arrangement relatif des 2μ triangles élémentaires qui recouvrent la surface φ_μ . Nous considérerons en particulier le voisinage des points de la surface φ_μ qui résultent des sommets des triangles du polygone F_μ et que nous appelons, pour des raisons évidentes, points équivalents avec ρ, i ou

$i\infty$. Un des points équivalents avec ρ peut être entouré de six triangles élémentaires, comme cela a lieu dans le plan des ω . Mais il peut arriver aussi qu'il soit entouré de deux triangles élémentaires seulement. Cela se produit lorsque dans Γ_μ est contenue la substitution elliptique de *période trois*, qui a pour point fixe le point équivalent à ρ considéré. Le dit point sera alors placé sur la limite du polygone F_μ , car les six triangles élémentaires qui l'entourent sont équivalents relatifs trois par trois; on étend aussitôt cette considération aux points équivalents avec i et $i\infty$; on a alors le théorème : *pour un point équivalent avec ρ de la surface φ_μ , le voisinage de ce point est recouvert par six triangles élémentaires, ou par deux triangles élémentaires seulement; un point équivalent avec i est entouré de deux ou quatre triangles élémentaires, le cas de deux triangles élémentaires se présentant quand dans Γ_μ est contenue la substitution modulaire elliptique de période deux qui admet ce point pour point fixe. Enfin un point équivalent avec $i\infty$ sera entouré de $2n$ triangles élémentaires, n étant un nombre entier quelconque.* Pour déterminer ce nombre n dans chaque cas particulier, on doit revenir au point rationnel réel correspondant ω et considérer les substitutions modulaires paraboliques correspondantes qui ont ce point pour point fixe. Imaginons ces substitutions rangées en une série d'après la grandeur de leur amplitude; n est l'amplitude de la première d'entre elles qui appartient au sous-groupe Γ_μ (1).

La surface φ_μ de l'espace présente en général une connexion élevée. On mesure, comme on sait, le degré de complication de la connexion d'une surface fermée en indiquant le nombre des coupures par lesquelles elle sera découpée de telle façon que, bien qu'en-core simplement connexe, toute nouvelle coupure additionnelle la partage en deux morceaux séparés. Ce nombre est toujours pair; si on l'appelle $2p$, le nombre p est le genre de la surface. Si p est le

(1) Pour la définition et les propriétés des substitutions modulaires elliptiques, paraboliques, etc., voir Klein-Fricke, *Vorlesungen*, vol. I, 2^e partie, chap. II, page 181 et chap. III, page 261 et suivantes.

genre de la surface φ_μ , le sous-groupe φ_μ est dit de genre p . Le nombre p est l'un des caractéristiques du sous-groupe Γ_μ .

Nous allons maintenant introduire des conventions telles que la surface φ_μ sera en relation non plus seulement avec le polygone F_μ , mais avec le demi plan ω tout entier.

D'après la construction adoptée pour φ_μ les μ doubles triangles du polygone F_μ , qui portaient les noms $1, V_1, V_2, \dots, V_{\mu-1}$ sont conjugués sans ambiguïté aux μ doubles triangles de la surface φ_μ . Nous conservons les noms $1, V_1, V_2, \dots, V_{\mu-1}$ pour les μ doubles triangles de la surface φ_μ . Deux triangles V_i, V_k de la surface sont alors toujours adjacents dans le même sens que les deux triangles V_i, V_k dans le polygone F_μ . Nous pouvons alors imaginer la correspondance du polygone et de la surface fixée par cette convention que nous conjuguons au triangle 1 de F_μ le triangle 1 de φ_μ , et que nous faisons correspondre à des triangles adjacents de F_μ des triangles adjacents dans le même sens de φ_μ . Par cette convention les triangles ne sont considérés que comme formant chacun un tout unique; pour fixer la correspondance des points situés à l'intérieur de deux triangles conjugués, nous adopterons la correspondance continue qui est fixée par la transformation continue du polygone F_μ dans la surface φ_μ .

Ce mode de conception de la correspondance établie nous permet d'étendre immédiatement la correspondance entre la surface et le polygone F_μ à la partie du demi plan ω située à l'extérieur de ce polygone. Franchissons en effet la limite de notre polygone F_μ en un point quelconque, nous parvenons tout d'abord à un triangle modulaire $v_k V_i$ adjacent extérieurement à la limite du polygone F_μ . Mais à ce triangle est déjà conjugué d'après notre convention sur la surface φ_μ le double triangle V_i qui porte déjà le nom V_i ; car nous avons déformé le polygone F_μ de telle manière que ses courbes limites conjuguées coïncidaient à la fin de la déformation. Mais ce n'est tout d'abord que la totalité du triangle modulaire $v_k V_i$ qui est conjuguée au triangle V_i de φ_μ ; nous imaginerons en outre les points à l'intérieur des triangles conjugués les uns aux autres suivant une loi continue telle que des points équi-

valents relatifs dans les deux triangles modulaires $V_i, v_k V_i$ correspondent au même point de F_μ . On aperçoit aussitôt comment on devra poursuivre l'établissement de la correspondance; et comme résultat final, on obtient le théorème : *entre la surface fermée φ_μ et le demi-plan positif des ω on a établi une correspondance telle qu'à tout double triangle $v_k V_i$ du polygone correspond un double triangle V_i de la surface et à un double triangle particulier V_i de la surface une infinité de triangles modulaires $V_i, v_1 V_i, \dots$*

Deux points équivalents relatifs ω et $\omega' = v_k(\omega)$ sont donc conjugués au même point de φ_μ . Si on trace un chemin joignant les deux points ω et ω' , et cheminant tout entier dans le demi plan positif des ω , et, si l'on transporte ce chemin sur la surface φ_μ , on trouvera sur φ_μ une ligne fermée.

§ 8. — *La surface φ_μ dans le cas d'un sous-groupe invariant Γ_μ .*

Nous imaginons maintenant un groupe Γ_μ , et nous supposons de plus que la substitution modulaire V_k (qui sera l'une des μ substitutions $V_1, V_2, \dots, V_{\mu-1}$) transforme Γ_μ en lui-même. Le polygone fondamental F_μ sera transformé en lui-même par V_k , abstraction faite de déformations permises. Par cette transformation les triangles éprouvent une permutation par laquelle des triangles adjacents deviendront des triangles adjacents dans le même sens; mais, pour que cette dernière proposition ait lieu sans restriction, nous devons appeler triangles adjacents deux triangles confinant au périmètre du polygone et dont les côtés libres sont équivalents relatifs. Nous pouvons nous dispenser de cette convention additionnelle lorsque nous passons du polygone F_μ à la surface φ_μ . Nous pourrions alors énoncer ce théorème : *dire que la substitution V_k est permutable avec Γ_μ , c'est dire que la surface φ_μ , ou mieux encore la division triangulaire qu'elle porte, est susceptible d'une transformation uniforme en elle-même, savoir la transformation par*

laquelle le triangle 1 est remplacé par le triangle V_k , et des triangles adjacents par des triangles adjacents dans le même sens.

Considérons maintenant le cas d'un sous-groupe Γ_μ invariant dans Γ .

Pour un tel Γ_μ nous avons le théorème : *la permutabilité de toute substitution modulaire de première espèce avec le sous-groupe Γ_μ est synonyme de la possibilité de transformer la surface φ_μ en elle-même de μ manières différentes, de telle façon que la division de celle-ci en μ doubles triangles se transforme en elle-même* (bien entendu parmi ces transformations est comptée la substitution identique). On dit alors que la surface φ_μ possède une *division régulière* en μ doubles triangles. Choisissons maintenant deux doubles triangles de la surface régulièrement divisée. Il y a une transformation qui transformera φ_μ en elle-même de telle manière que l'un des triangles considérés se transforme dans l'autre. Si nous faisons abstraction des rapports métriques entre les triangles de φ_μ , et, si nous considérons seulement les relations de situation de ces triangles, nous voyons que le réseau triangulaire qui enveloppe la surface φ_μ est tel que les μ triangles qui le composent se disposent autour de l'un quelconque d'entre eux de la même manière qu'autour de tout autre triangle. En particulier, l'arrangement des triangles autour des sommets, c'est-à-dire des points de la surface équivalents avec ρ , i , $i\infty$ sera soumis à des lois régulières; on aura manifestement le théorème : *pour une surface régulière φ_μ , tout point de l'une des trois catégories ci-dessus sera toujours entouré du même nombre de triangles élémentaires que tout autre point de la même catégorie.*

Nous pouvons remarquer que les μ transformations en elle-même que comporte notre surface φ_μ forment un groupe du $\mu^{\text{ième}}$ ordre. Ce groupe est isomorphe holoédrique au groupe G_μ que nous avons conjugué plus haut au groupe invariant Γ_μ (§ 6), pourvu que l'on fasse correspondre à l'opération V_k de G_μ la transformation de φ_μ en elle-même par laquelle le double triangle 1 sera transformé dans

le double triangle V_k . On démontre aussitôt cet isomorphisme holoédrique en revenant aux substitutions modulaires et aux triangles modulaires pris pour bases des deux groupes. En effet, la correspondance isomorphe de G_μ avec Γ , telle qu'elle a été établie plus haut, revient à la relation établie entre les doubles triangles de φ_μ et ceux du demi plan ω , en désignant par V_k dans le premier cas une opération du groupe G_μ , et dans le second cas un double triangle. Ce résultat est d'autant plus important que nous obtenons ainsi une représentation concrète pour le groupe G_μ , tandis que jusqu'à présent une opération de G_μ n'était qu'un symbole représentant une infinité de substitutions modulaires.

§ 9. — *Calcul du genre p d'un sous-groupe Γ_μ . Cas d'un sous-groupe invariant.*

Pour obtenir une formule simple pour le calcul du genre p d'un sous-groupe donné Γ_μ , on imagine tracées les différentes cordes de la surface φ_μ qui sous-tendent les côtés des triangles du réseau triangulaire qui recouvre φ_μ . Aucune de ces cordes, d'après la construction même de φ_μ , n'est infiniment petite. A chaque triangle de φ_μ correspond alors un triangle plan de dimensions finies. On déforme alors la surface φ_μ de façon à ce que l'un quelconque des triangles qui la recouvre vienne se confondre avec le triangle plan qui a mêmes sommets que lui; on obtient ainsi à la place de φ_μ un polyèdre φ'_μ à connexion multiple qui peut remplacer φ_μ et qui a même genre p que φ_μ . Les faces de ce polyèdre correspondent aux triangles élémentaires, ses arêtes aux côtés de ces triangles, et ses sommets aux points de la surface φ_μ équivalents avec ρ , i , $i\infty$. Nous désignons par f , α , s le nombre de ces éléments pour notre polyèdre, et nous avons alors, d'après le théorème d'Euler

généralisé pour les polyèdres de cette espèce, entre ces nombres et le genre p la relation

$$s + f = a - 2p + 2 \quad (1).$$

D'autre part f n'est autre que le nombre 2μ des triangles élémentaires qui recouvrent φ_μ . La formule ci-dessus s'écrit alors :

$$p = -\mu + 1 + \frac{1}{2}(a - s).$$

Imaginons de plus les sommets du polyèdre, c'est à dire les points équivalents avec i , ρ , i_∞ numérotés dans un ordre quelconque depuis 1 jusqu'à s . Le v^{me} d'entre eux sera entouré sur φ_μ de $2n_v$ triangles élémentaires ; et il sera le point de rencontre de $2n_v$ arêtes du polyèdre. La somme $\sum_{v=1}^s n_v$ représentera donc le nombre total a des arêtes du polyèdre. Comme d'ailleurs le nombre des termes de cette somme est s , on aura $a - s = \sum_{v=1}^s (n_v - 1)$ et l'on obtient pour formule définitive donnant le genre p du sous-groupe Γ_μ :

$$p = -\mu + 1 + \sum_{v=1}^s \frac{n_v - 1}{2}.$$

Considérons en particulier un groupe invariant dans Γ . Pour un tel sous-groupe, des sommets équivalents sont toujours entourés du même nombre $2n_v$ de triangles élémentaires ; le nombre n_v est d'ailleurs 1 ou 2 pour les points équivalents à i , 1 ou 3 pour les points équivalents à ρ , et quelconque pour les points équivalents à i_∞ .

(1) Pour cette relation voir Klein-Fricke, *Vorlesungen*, vol. I, page 331 (note), ou bien Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, page 196.

Désignons respectivement par n_i , n_ρ , $n_{i\infty}$ les nombres n_v pour un point quelconque de chacune des trois catégories ; le nombre des points équivalents avec i est évidemment $\frac{2\mu}{2n_i} = \frac{\mu}{n_i}$; celui des points équivalents avec ρ est $\frac{\mu}{n_\rho}$, et celui des points équivalents avec $i\infty$, $\frac{\mu}{n_{i\infty}}$; de sorte que l'équation qui donne p s'écrit :

$$p = -\mu + 1 + \frac{\mu}{n_i} \frac{n_i - 1}{2} + \frac{\mu}{n_\rho} \cdot \frac{n_\rho - 1}{2} + \frac{\mu}{n_{i\infty}} \frac{n_{i\infty} - 1}{2}.$$

Cette relation sera satisfaite par les éléments de tout sous-groupe invariant de Γ ; mais la réciproque n'est pas vraie, et il n'est pas certain qu'il existe un groupe invariant Γ_μ correspondant à une solution en nombres entiers de l'équation ci-dessus ; de même, à une solution unique de l'équation, peuvent répondre plusieurs groupes Γ_μ .

On vérifie sans difficulté en discutant l'équation ci-dessus qu'à part le groupe modulaire, et, dans le cas où $\mu \neq 2, 3$, il ne peut y avoir de sous-groupe invariant pour lequel l'un au moins des deux nombres n_i , n_ρ soit égal à 1. Tous les groupes invariants correspondent à une solution $n_i = 2, n_\rho = 3, n_{i\infty} = n$, n étant un entier quelconque ; et, pour déterminer leur genre, on aura la formule

$$12np + \mu(6 - n) = 12n$$

qui se déduit de la précédente en y introduisant les hypothèses ci-dessus.

Cette formule s'écrit encore $\mu = n \frac{12(p-1)}{n-6}$, de sorte que $12(p-1)$ doit être divisible par $n-6$, car μ doit contenir le facteur n .

§ 10. — *Définition des sous-groupes modulaires
par les surfaces φ_μ ⁽¹⁾.*

D'après ce qui a été vu dans les §§ précédents, on peut remplacer le polygone fondamental F_μ d'un sous-groupe Γ_μ par une surface fermée φ_μ de l'espace qui portera une division en 2μ triangles élémentaires alternativement blancs et ombrés. Ces 2μ triangles élémentaires se grouperont d'une manière caractéristique autour de leurs sommets ; ces sommets se partageront d'ailleurs en trois catégories selon qu'ils proviendront de points qui, dans le plan des ω , étaient équivalents avec i , ρ ou $i\infty$. Nous désignons d'une manière générale par $a_1, a_2, \dots$ les sommets de la surface φ_μ provenant de points équivalents avec i , par $b_1, b_2, \dots$ ceux qui correspondent au point ρ , et par $c_1, c_2, \dots$ ceux provenant de points équivalents avec $i\infty$. Le réseau triangulaire qui recouvre la surface φ_μ est alors caractérisé par les relations de positions suivantes : un point a de φ_μ sera entouré de 2 ou de 4 triangles élémentaires, un point b de 2 ou de 6 triangles, et un point c d'un nombre pair quelconque de triangles élémentaires.

De même qu'on pouvait définir le groupe Γ_μ par l'indication du polygone fondamental, on pourra définir Γ_μ par φ_μ , en ayant soin de fixer seulement quel double triangle de la surface doit correspondre au triangle initial 1 (Ausgangsdreieck) du demi plan ω . En effet, on passera très facilement de la surface φ_μ au polygone fondamental, en découpant le dit double triangle de la surface pour l'étendre ensuite sur le double triangle 1 du demi-plan ω , et en transportant successivement les différents triangles élémentaires de la surface sur le plan des ω , en les plaçant aux places qui leur conviennent de manière à respecter les relations de position qui doivent être les mêmes sur la surface et sur le plan.

(1) Pour les paragraphes 10 à 14 inclus, voir Klein-Fricke, *Vorlesungen*, 2^e partie, chap. VI, page 345, volume I.

On pourra effectuer cette opération d'un très grand nombre de manières ; mais il est bien clair que les différents polygones que l'on obtiendra ainsi ne différeront entre eux que par des déformations permises, et correspondront tous au même groupe Γ_μ .

Si au lieu de conjuguer le triangle 1 de la surface au double triangle 1 du demi-plan ω , on lui avait conjugué le double triangle V_k de φ_μ , et si l'on avait ensuite, conformément à cette correspondance, étendu la surface sur le demi plan ω , on aurait obtenu un polygone F'_μ , qui se déduirait du polygone F_μ de plus haut à l'aide de la substitution V_k^{-1} . Ce polygone serait donc le polygone fondamental du groupe semblable à $\Gamma_\mu : V_k^{-1}\Gamma_\mu V_k$ de sorte que l'on obtient le théorème : *par la surface fermée φ_μ est défini le sous-groupe Γ_μ ou un groupe semblable avec lui, selon que l'on conjugue le double triangle 1 de φ_μ , ou un autre double triangle de φ_μ , au double triangle 1 du demi-plan.*

Ces considérations nous amènent à un théorème important qui sera le fondement de toute cette étude. Supposons que l'on nous donne une surface *fermée* quelconque de genre quelconque p portant un réseau de 2μ triangles élémentaires présentant entre eux les relations de position que nous avons reconnues tout à l'heure aux triangles du réseau d'une surface φ_μ . *Dans l'ordre d'idées qui nous occupe, cette surface, donnée arbitrairement, définit par son réseau triangulaire un système de sous-groupes semblables du groupe modulaire d'indice μ , dont l'un sera entièrement caractérisé si l'on indique le double triangle de la surface qui est conjugué au double triangle 1 de l' ω demi plan.*

Cette proposition constitue le *théorème de la ramification* (Verzweigungssatz de M. Klein). Pour faciliter la démonstration de ce théorème, nous désignerons encore par φ_μ , a , b , c , la surface donnée arbitrairement et les points sommets de triangles de cette surface entourés respectivement de 2 ou 4, 2 ou 6, ou d'un nombre pair quelconque de triangles élémentaires. En outre, nous supposons les triangles élémentaires alternativement blancs et ombrés et cela de telle manière que les rapports de position de deux triangles élémentaires dont l'ensemble constitue un double triangle

soient les mêmes que dans la division modulaire. La démonstration du théorème de la ramification est l'objet des deux paragraphes qui suivent.

§ 11. — *Fixation d'une correspondance entre la surface divisée φ_μ et le demi plan ω .*

Avant d'en venir à la démonstration proprement dite du théorème de la ramification, il est nécessaire d'établir une correspondance déterminée entre la surface donnée φ_μ et le demi plan des ω . Nous conjugurons d'abord à un triangle ombré quelconque de φ_μ le triangle fondamental du demi plan ω , de telle sorte qu'aux trois sommets a, b, c , correspondent les trois sommets $i, \rho, i\infty$; quant aux points des deux triangles ils se correspondront sans ambiguïté et avec réciprocité d'après une loi continue quelconque. En outre, des triangles adjacents sur φ_μ correspondront à des triangles adjacents dans le même sens de la division modulaire, et réciproquement; si deux triangles modulaires se trouvent conjugués au même triangle de φ_μ , on établira la correspondance des points intérieurs de telle manière qu'à des points équivalents de deux triangles modulaires correspondra un même point de la surface. Comme aussi bien la surface φ_μ que la division modulaire portent des réseaux simplement connexes, on trouvera ainsi conjugué à tout triangle de la division modulaire un triangle de la surface et réciproquement.

Soient maintenant ω et ϖ deux points correspondants quelconques de la surface et du plan ω , nous allons étudier d'une manière plus précise la correspondance du voisinage de ces deux points. Pour cela nous tracerons autour de l'un des deux points un petit cercle, et nous déplaçant sur celui-ci, nous verrons quel est le chemin correspondant autour de l'autre point. Si les deux points ω et ϖ ne sont pas précisément des sommets de leurs divisions respectives les choses se passent très simplement: *un tour autour du point ω entraîne un tour autour du point ϖ* . Il en est de même lorsque ϖ est un point a ou b , pourvu que le point ϖ soit entouré de quatre

triangles élémentaires, si c'est un point a , ou de six triangles élémentaires si c'est un point b . Il n'en est plus de même, si le point ϖ est entouré seulement de deux triangles élémentaires : *un seul tour autour de ω a pour conséquence, selon que ϖ est un point a ou un point b , deux ou trois tours autour du point ϖ* . Les points c jouent ici un rôle très particulier. Si ϖ est l'un de ces points (1), il est conjugué à un point rationnel réel $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$. Les $2n$ triangles élémentaires formant un cycle autour de ϖ sont alors conjugués aux triangles du domaine $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$, en appelant domaine $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ la figure formée par les triangles modulaires en nombre infini qui ont pour sommet d'angle nul le point $\frac{\alpha}{\gamma}$; ce domaine $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$, tout entier dans le demi plan positif, joue le rôle du voisinage du point ω . Si nous avons trouvé sur les chemins suivis autour de c et $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ un des $2n$ triangles entourant c conjugué à un triangle déterminé de $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$, le voisinage de c présente avec $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ une correspondance monomultivalente, c'est-à-dire qu'à tout triangle de $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ est conjugué un triangle du voisinage de c , et à l'un de ces derniers une infinité de triangles de $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$, qui se succèdent les uns aux autres à des intervalles de $2n$ triangles dans l'éventail de triangles $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$.

Soient maintenant ω un point quelconque dans l'intérieur du plan ω et ϖ son correspondant sur φ_{μ} . Nous dessinons à partir de ω un petit circuit ne se croisant pas lui-même, se fermant au point ω , qui chemine soit à travers un seul triangle modulaire, soit à travers plusieurs triangles adjacents et qui peut entourer un point équivalent à ρ ou à i . Nous supposons ce chemin parcouru dans un sens tel que l'on tourne dans le sens positif autour du petit domaine délimité par

(1) Nous supposons que le point ω n'est pas précisément le point $\omega = i\infty$.

ce chemin dans le plan des ω . Nous considérons le chemin que décrit le point correspondant sur φ_μ . Manifestement d'après ce qui vient d'être dit, ce chemin sera fermé et il ramènera au point ω , après avoir entouré une ou plusieurs fois, ou pas du tout, un point a ou b de φ_μ . Soient ensuite ω' , ω'' deux points conjugués sur nos deux chemins fermés. Prenons maintenant ω' pour point de départ d'un chemin fermé analogue se composant d'un premier morceau qui coïncide avec une partie du chemin considéré en premier lieu parcouru en sens contraire, et d'un second morceau qui, se détachant du chemin primitif, va finir en ω'' sans s'être croisé lui-même, et sans avoir rencontré le chemin primitif. Le nouveau circuit enveloppe dans le plan ω un petit domaine qui est adjacent au premier domaine considéré le long de la partie commune aux deux circuits. D'une manière analogue, sur φ_μ nous partons de ω'' le long du segment déjà décrit, mais en sens contraire, et nous revenons en ω' le long d'un chemin qui se détache du premier et ne le rencontre plus. Si maintenant dans le plan des ω , nous parcourons successivement les deux circuits dans le sens du mouvement primitif, nous pouvons effacer le morceau décrit deux fois et nous obtenons un chemin fermé plus grand prenant naissance en ω . Il est bien clair que nous obtenons comme lui correspondant sur φ_μ un chemin issu de ω et également fermé. Mais comme le demi plan ω est un domaine simplement connexe, on peut par l'application de ce procédé parvenir d'une manière générale à tout circuit issu de ω . On obtient ainsi l'important théorème : *d'après la relation établie entre φ_μ et le demi plan ω , tout chemin de φ_μ correspondant à un chemin fermé de l' ω demi plan est également fermé.* Nous ajoutons encore expressément que le chemin fermé du demi plan des ω peut se croiser d'une manière quelconque ; car, en effet, dans le cas où il se croise, il peut se décomposer en une série de circuits ne se croisant pas, et, puisque le théorème a lieu pour chacun de ces circuits, il a lieu aussi pour le circuit total qu'ils constituent.

De ce théorème nous tirons aussitôt une importante conséquence. D'après la correspondance établie plus haut, on a trouvé qu'un triangle modulaire était conjugué à un triangle déterminé de φ_μ .

De quelque manière que nous opérions pour trouver le triangle qui correspond à un double triangle modulaire, nous obtenons toujours le même triangle de φ_μ ; car en partant dans les deux cas d'un même point ω de ce triangle pour aboutir au point équivalent du double triangle 1, et en parcourant ensuite ces deux chemins successivement dans un sens quelconque, nous décrirons sur le demi plan ω , et par suite sur φ_μ , un chemin fermé. De là ce théorème : *d'après la relation existant entre φ_μ et le demi plan ω , à un triangle de ce dernier est toujours conjugué un seul triangle de F_μ .*

§ 12. — *Démonstration du théorème de la ramification.*

A l'aide de ce qui précède, il est maintenant facile de démontrer le théorème de la ramification. A cet effet, nous étendrons de la manière suivante la surface φ_μ sur le plan des ω . Le triangle élémentaire ombré de φ_μ que nous avons conjugué au triangle fondamental ombré de la division modulaire sera découpé de la surface φ_μ et étendu sur ce dernier. Nous transportons ensuite un autre triangle qui borde l'ouverture ainsi faite dans φ_μ et nous le disposons à côté du triangle déjà transporté dans le demi plan ω . Nous poursuivons ainsi jusqu'à ce que les 2μ triangles de la surface soient transportés. Deux triangles différents de φ_μ ne peuvent être étendus sur le même triangle modulaire, sans quoi deux triangles de φ_μ seraient conjugués à un même triangle modulaire, contrairement à ce qui précède. Nous obtenons ainsi dans le plan ω un ensemble de 2μ triangles élémentaires placés les uns à côté des autres, ensemble qui peut d'ailleurs être construit de façons très-différentes, en modifiant l'ordre dans lequel on transporte les triangles φ_μ . Nous appelons cet ensemble de triangles le polygone F_μ .

Le polygone F_μ aura un nombre pair d'arêtes libres qui seront conjuguées deux à deux ; en effet, nous conjuguons toujours deux courbes limites dont les images sur φ_μ coïncident. Nous imaginons marqués en gros traits les arcs de courbe de la division triangulaire

de φ_μ qui fournissent les courbes limites du polygone ; ou bien encore nous concevons la surface φ_μ fendue précisément le long de ces lignes. A un triangle modulaire D_e qui confine la limite, mais qui est placé à l'extérieur du polygone F_μ correspond maintenant dans le sens spécifié plus haut un triangle de la surface qui est adjacent à l'une des coupures que l'on a faites ; et ce dernier triangle se transforme, lorsqu'on étend la surface sur le plan des ω , en un triangle D_i placé à l'intérieur de F_μ et sur la limite de celui-ci. La substitution modulaire de première espèce qui transforme D_e dans D_i est précisément celle qui transforme l'une des courbes limites de F_μ dans l'autre. Nous établissons ainsi la totalité des substitutions modulaires qui expriment la correspondance qui a lieu entre les courbes limites de F_μ . Soient $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m$ ces substitutions modulaires de première espèce.

Un point quelconque ω par l'usage de l'une de ces opérations v_k se transforme en $\omega' = v_k(\omega)$. Nous imaginons ω et ω' réunis l'un à l'autre par un chemin quelconque tout entier dans le demi plan positif des ω . Ce chemin se transformera toujours sur φ_μ en une ligne fermée. Car, comme nous l'avons vu lors de l'introduction des v_k , deux certains triangles modulaires V et $V' = v_k V$ sont conjugués au même double triangle φ_μ . D'après la nature de la correspondance entre φ_μ et le demi plan ω , aux deux doubles triangles $V'S$ et VS (voir paragraphe 1) correspond le même triangle de φ_μ , et de même à $V'T$, VT le même double triangle de φ_μ . On conclut de là qu'à deux points ω et $\omega' = v_k(\omega)$ du demi plan ω est conjugué un seul et même point de la surface φ_μ .

Maintenant, par des déformations permises (que nous pouvons employer sur F_μ aussi bien que sur les polygones fondamentaux des sous-groupes du groupe modulaire), nous transformerons notre polygone F_μ de telle façon que les 2μ triangles élémentaires qui le composent forment μ doubles triangles de la division modulaire. Ces derniers seront les triangles $1, V_1, V_2, \dots, V_{\mu-1}$, dénominations que nous supposons aussitôt transportées sur φ_μ .

Engendrons maintenant, par combinaison et répétition des substitutions v_i , un groupe Γ' qui soit contenu dans le groupe modu-

laire (et qui peut-être coïncide avec lui). Soient $1, v_{m-1}, v_{m-2}, \dots$ les substitutions nouvelles ainsi obtenues. Comme toute courbe limite du polygone F_μ a été conjuguée à une autre, à l'aide d'une substitution (1). Il résulte de la considération suivante que, pour tout point ω' du demi plan ω , on peut trouver dans le polygone F_μ au moins un point équivalent à ω' par rapport à Γ' . Tirons d'un point quelconque ω_0 de F_μ une ligne cheminant tout entière dans le demi plan positif des ω , et se terminant au point ω' , puis parcourons cette ligne en partant de ω_0 . Une première partie de notre ligne est située dans F_μ ; nous franchissons en un point déterminé la limite de F_μ , et nous parcourons en conséquence le triangle D_e adjacent à cette limite et à l'extérieur. Mais, par suite de la correspondance entre les arêtes de F_μ , celui-ci est équivalent par rapport à Γ' avec un triangle D_i de F_μ qui touche intérieurement la limite de F_μ ; nous pouvons donc pour la partie suivante de notre chemin trouver un chemin équivalent relatif (par rapport à Γ') qui traverse en premier lieu le double triangle D_i , puis une série d'autres triangles de F_μ . Si nous imaginons ainsi les deux chemins équivalents relatifs décrits simultanément, le dernier chemin considéré franchira de nouveau la limite de F_μ pour pénétrer dans un triangle D'_e adjacent extérieurement. Si de nouveau, en vertu de la correspondance des arêtes D , le double triangle D'_i de F_μ est équivalent relatif avec D'_e , on pourra renouveler le raisonnement et continuer ainsi. On voit aussitôt la conclusion à tirer de là : le chemin primitif, qui va de ω_0 à ω , traverse un nombre fini de triangles, car il est tout entier dans le demi plan positif des ω . Ce chemin se transforme donc seulement en un nombre fini de lignes équivalentes relatives avec les différentes parties du chemin et traversant F_μ . La dernière de ces lignes se terminera en un point ω du polygone F_μ qui sera atteint en même temps que le point ω' situé à l'extérieur. Ce point ω est ainsi un point équivalent avec ω' par rapport à Γ' et situé dans F_μ . Si maintenant ω' est dans le double triangle V du demi plan ω , tandis que le point équivalent relatif (par rapport à Γ') est dans le double triangle V_k de F_μ , on aura pour V une expression de la forme (2) $V = v_i V_k$, puisque ω' et ω

étaient équivalents par rapport à Γ' . Mais un chemin conduisant de ω' à ω se transforme sur φ_μ en un chemin fermé, parce qu'il correspond à une opération v_k . Par suite, V_k est le triangle parfaitement déterminé qui est conjugué sans ambiguïté au triangle modulaire V . Dans (2), V et V_k sont définis en même temps, et par conséquent aussi $v_i = VV_k^{-1}$. On a ainsi l'important théorème : *toute substitution modulaire de première espèce comporte d'une seule manière une expression sous la forme (2).*

Imaginons maintenant construit un tableau rectangulaire à l'aide des substitutions $v_i V_k$, tableau dans une ligne horizontale duquel figurent toutes les substitutions $v_i V_k (i = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots)$, et, dans les lignes verticales les substitutions $v_i V_k (k = 0, 1, \dots, \mu-1)$.

D'après ce qui vient d'être dit, dans ce tableau figurera toute substitution modulaire de première espèce, et une substitution de cette nature n'y figurera qu'une seule fois ; de plus, les substitutions de Γ' seront rangées dans la première ligne. Ces trois propriétés du tableau ainsi construit suffisent pour le faire reconnaître pour le tableau qui correspond à un sous-groupe Γ' du groupe modulaire, et qui sert à définir l'indice de ce sous-groupe. Nous avons ainsi le résultat dont nous ferons constamment usage dans la suite : Γ' n'est nullement identique avec le groupe total Γ : c'est un sous-groupe d'indice μ de celui-ci. *Nous reconnaissons dans $V_1, V_2, \dots, V_{\mu-1}$ un système de substitutions représentantes de celui-ci, dans F_μ un polygone fondamental, et dans les substitutions $v_1, v_2, \dots$ qui associent deux à deux les arêtes de ce polygone, un système de substitutions génératrices de Γ' .*

Le théorème de la ramification se trouve ainsi établi : considérons en particulier une surface φ_μ telle que la division qu'elle porte soit régulière, c'est-à-dire telle qu'un point a soit toujours entouré de quatre triangles élémentaires, un point b de six triangles élémentaires et un point c de $2n$ triangles élémentaires. Le groupe Γ_μ sera un groupe invariant dans le groupe modulaire. Si l'on considère comme identiques les opérations de Γ_μ les μ opérations V_k auxquelles se réduit le groupe modulaire Γ formeront un groupe fini d'ordre μ ; et ce groupe pourra s'interpréter comme un groupe

de μ transformations de la surface φ_μ en elle-même, ces transformations étant considérées au point de vue de la géométrie de situation.

Le théorème de la ramification donne un moyen tout à fait général pour définir les sous-groupes du groupe modulaire ; nous pouvons même par ce procédé obtenir la totalité de ces sous-groupes. Si l'on veut former par exemple tous les sous-groupes d'indice fini μ , on se servira tout de suite du polygone F_μ au lieu de la surface φ_μ . On représentera tout d'abord tous les ensembles de μ doubles triangles que l'on peut construire en partant du triangle fondamental 1. Pour un ensemble particulier, on aura ensuite à fixer la correspondance des arêtes de telle sorte que par le passage à la surface fermée correspondante φ_μ l'arrangement des triangles sur cette dernière satisfasse aux conditions du théorème de la ramification. Cette correspondance des courbes limites peut, la plupart du temps, être établie de plusieurs manières différentes. Chaque polygone F_μ ainsi déterminé définit un sous-groupe Γ_μ et tous les polygones F_μ qui s'en déduisent par déformations permises définissent le même groupe Γ_μ . On reconnaîtra facilement, d'après le raisonnement fait, qu'il y a seulement un nombre fini μ de sous-groupes Γ_μ d'indice fini μ . Mais ce nombre est déjà grand aussitôt que μ a une valeur un peu élevée.

Nous allons appliquer ces principes à un cas qui nous intéressera particulièrement dans la suite et qui nous permettra de définir la *classe* d'un sous-groupe Γ_μ .

§ 13. — *Du groupe invariant $\Gamma_{\{n\}}$.*

On sait qu'il existe toute une série de fonctions, dites fonctions de M. Schwartz (ou fonctions triangulaires) dont les différentes branches, en nombre infini, sont les différentes solutions d'une équation différentielle du troisième ordre, dont les coefficients sont des fonc-

tions rationnelles de la variable indépendante J ; ces différentes branches s'expriment linéairement à l'aide de l'une quelconque d'entre elles ; et si l'on cherche la représentation conforme du plan de la variable indépendante J par les différentes branches de la fonction s , on obtient un réseau d'une infinité de triangles curvilignes dont les côtés sont des arcs de cercles orthogonaux à un même cercle dit cercle orthogonal et situés tous à l'intérieur de ce cercle, qu'ils recouvrent entièrement et sans lacune ; tous ces triangles sont congrus ou symétriques entre eux et ont pour angles $\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\beta}, \frac{\pi}{\gamma}$, où α, β, γ sont des nombres entiers. Les propriétés de ces fonctions sont d'ailleurs entièrement analogues à celles de la fonction $\omega(J)$ qui n'en est qu'un cas particulier ⁽¹⁾. Considérons en particulier la fonction s dont le triangle fondamental a pour angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{n}$, fonction que nous désignons par $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}, J\right)$ et dont la division

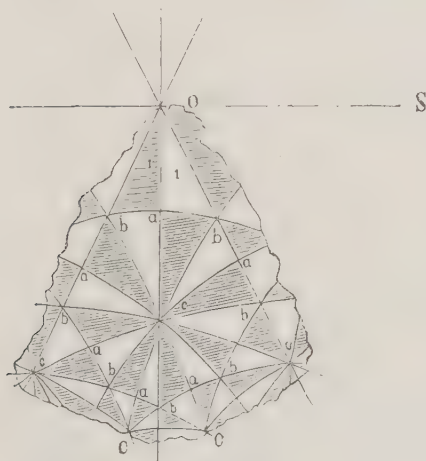


Fig. 3 (2).

triangulaire sera désignée par $(2, 3, n)$. Supposons, en outre, pour plus de clarté, le triangle élémentaire initial ombré de la division $(2, 3, n)$ (qui est la représentation conforme du demi plan positif des J) fixé de telle sorte que les deux côtés qui comprennent l'angle $\frac{\pi}{n}$ soient rectilignes, tandis que le sommet correspondant est au zéro du plan des s . Le troisième côté du triangle fondamental sera en outre choisi,

(1) Pour les propriétés de s voir : Schwartz, *Journal de Crelle*, vol. LXXV (1872) ; Klein, *Vorlesungen*, chap. III, 1^{re} partie, et surtout les mémoires de M. Poincaré sur les groupes et les fonctions fuchsiennes, *Acta mathematica*, vol. I.

(2) $n=7$. La division $(2, 3, 7)$ se compose de sept secteurs indéfinis disposés symétriquement autour du point O.

pour $n > 6$, de telle sorte que le cercle orthogonal se présentant dans ce cas coïncide avec le cercle unité du plan des s . Enfin le triangle fondamental sera de plus orienté de façon que le côté commun aux angles $\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}$ coïncide avec la partie négative de l'axe imaginaire des s . (Fig. 3) ⁽¹⁾.

L'arrangement des triangles dans la division $(2, 3, n)$ satisfait aux conditions du théorème de la ramification, et il est remarquable que nous puissions employer en effet ce théorème sur notre division $(2, 3, n)$, tout comme sur la surface φ_μ ayant un nombre fini de triangles. Pour justifier cette proposition, nous ferons correspondre au triangle fondamental de la division $(2, 3, n)$ le triangle fondamental de la division modulaire. Nous pouvons de plus, puisque nous avons dans les deux cas affaire à des divisions modulaires simplement connexes, trouver, en suivant la marche adoptée dans le cas d'un μ fini, pour tout triangle de l'une des divisions, au moins un triangle de l'autre division qui lui sera conjugué. Les points a et b ⁽²⁾ sont respectivement entourés de quatre ou six triangles élémentaires, comme c'est le cas pour le demi plan ω . Si donc nous obtenons par le procédé en question en ω et s deux points correspondants des deux divisions (en excluant pour s les points c et pour ω les points rationnels réels), nous voyons aussitôt que le voisinage de l'un de ces points est conjugué avec réciprocity et sans ambiguïté au voisinage de l'autre. Nous entendons ici par voisinage du point s l'intérieur d'un petit cercle décrit autour de s , qui s'étend jusqu'au point le plus voisin c de la division et nous imaginons le voisinage du point ω correspondant fixé de telle manière qu'il soit conjugué sans ambiguïté à celui de s . Il en est tout autrement, lorsque le

(1) Les cas $n \leq 6$ donnent un cercle orthogonal à l'infini. Si $n = 2, 3, 4, 5$, la division $(2, 3, n)$ a un nombre fini de triangles, et recouvre le plan tout entier. Pour $n = 6$, les triangles de la division $(2, 3, 6)$ sont en nombre infini et recouvrent le plan tout entier.

(2) On conserve pour les sommets de la division s la notation adoptée pour les sommets de φ_μ .

point s est un sommet c de la division $(2, 3, n)$; ω sera alors un point réel rationnel $\frac{\alpha}{\gamma}$. Ici nous considérons en effet comme voisinage de ce point s la couronne des $2n$ triangles qui l'entourent et nous trouvons que la correspondance de celui-ci avec le domaine $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ est multivalente. Soit en effet un de ces n doubles triangles autour du dit point c , conjugué à un triangle modulaire V de sommet $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$, un tour dans le sens positif autour de c ramène au même double triangle de $(2, 3, n)$, tandis que le chemin correspondant dans $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ fait passer du double triangle V au double triangle VS^n ($S = \omega + 1$). Mais ce dernier triangle prend aussi naissance en employant sur le triangle 1 la substitution modulaire parabolique VS^nV^{-1} d'amplitude n . Nous avons ainsi le théorème : *un seul tour autour d'un point c de la division $(2, 3, n)$, de quelle manière qu'on le suppose transporté sur le demi plan ω , donne sur celui-ci un chemin non fermé, ayant pour point initial ω et pour point final le point $\omega' = S_k^n(\omega)$, où S_k est une certaine substitution parabolique d'amplitude $+1$, dont le point fixe est conjugué au point c autour duquel on a tourné.*

D'autre part à tout chemin fermé que l'on peut tracer dans le plan ω correspond dans la division $(2, 3, n)$ un chemin fermé. Nous pouvons encore dire, d'après les considérations exposées plus haut, qu'à tout circuit fermé de la division $(2, 3, n)$ qui peut être réduit à un point sans qu'on franchisse un point c pendant la déformation du circuit, correspond un circuit fermé sur la division modulaire. De là on conclut comme plus haut que : *à un triangle de la division modulaire est conjugué seulement un triangle de la division $(2, 3, n)$; à un triangle de cette dernière correspond une infinité de triangles modulaires.*

Pour ne pas répéter le raisonnement fait plus haut à propos du théorème de la ramification, nous continuons de la manière suivante : toutes les substitutions linéaires de la variable complexe s , par lesquelles la division $(2, 3, n)$ sera transformée en elle-même,

forment un groupe d'ordre infini que nous appelons $G_{\{n\}}$ et dont nous désignons en abrégé les substitutions par $1, W_1, W_2, \dots$. A l'aide de ces substitutions, nous désignons comme d'habitude les triangles de la division $(2, 3, n)$ de la même manière que les triangles modulaires par les substitutions V . Par la correspondance entre les deux divisions sera fixée une correspondance entre $G_{\{n\}}$ et le groupe modulaire par laquelle à toute substitution V correspond une opération déterminée W et à toute opération W une infinité de substitutions V . D'après la nature de la correspondance entre les groupes $G_{\{n\}}$ et Γ , on reconnaît immédiatement qu'il y a isomorphisme entre ces deux groupes. Donc à la substitution identique du groupe $G_{\{n\}}$ correspond un groupe d'opérations $1, v_1, v_2, \dots$ du groupe modulaire formant un sous-groupe *invariant* de celui-ci, d'indice infini et que nous désignons par $\Gamma_{\{n\}}$.

Transportons maintenant les triangles de la division $(2, 3, n)$ sur le demi plan ω ; ils y donneront pour $\Gamma_{\{n\}}$ un polygone fondamental $\Gamma_{\{n\}}$. Supposons le triangle W_k étendu sur le double triangle V_k ; nous possédons dans les substitutions modulaires $1, V_1, V_2, \dots$, un système de substitutions représentantes pour $\Gamma_{\{n\}}$. En effet, la division $(2, 3, n)$ est pour notre sous-groupe $\Gamma_{\{n\}}$ d'indice infini précisément l'analogue de la surface φ_μ dans le cas d'un sous-groupe d'indice fini Γ_μ ; et les substitutions modulaires du groupe Γ se réduisent au système des V_k quand nous regardons comme identiques entre elles les opérations de $\Gamma_{\{n\}}$.

On démontre sans peine que les substitutions génératrices du groupe $\Gamma_{\{n\}}$ sont les substitutions paraboliques d'amplitude n , substitutions en nombre infini.

§ 14. — *Définition de la classe d'un sous-groupe du groupe modulaire. Emploi de $\Gamma_{\{n\}}$ pour l'étude des sous-groupes de classe n .*

Soit donné un sous-groupe quelconque Γ_μ d'indice fini μ du groupe modulaire, nous déterminons dans le plan ω un polygone fondamental pour ce groupe, et nous transformons ce polygone en une surface fermée φ_μ . La division triangulaire de φ_μ présentera un nombre fini et déterminé de points $c, c_1, c_2, \dots, c_i$ respectivement entourés de $2n_1, 2n_2, \dots, 2n_i$ triangles élémentaires. Soit maintenant $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ un point réel rationnel quelconque du demi plan ω ; il sera équivalent par rapport à Γ_μ avec le point c_i de Γ_μ , point qui sur la surface sera entouré de $2n_i$ triangles élémentaires. Nous prouvons alors facilement que la substitution parabolique $S_i^{n_i}$ d'amplitude n_i , qui possède le point $\frac{\alpha}{\gamma}$ pour point fixe, appartient au groupe Γ_μ . Nous pouvons maintenant employer la même considération sur les autres points réels rationnels ω . Si ensuite nous désignons par n le plus petit commun multiple des nombres $n_1, n_2, \dots$, nous avons manifestement le résultat suivant : *dans Γ_μ sont contenues toutes les substitutions paraboliques d'amplitude n .* Cela signifie que $\Gamma_{\{n\}}$ est contenu comme sous-groupe dans Γ_μ . Comme d'ailleurs, en même temps, toutes les substitutions paraboliques que le point c_i fournit pour Γ_μ , ont leur amplitude divisible par n_i , on voit en outre très facilement qu'aucun des groupes $\Gamma_{\{n-1\}}, \Gamma_{\{n-2\}}, \dots$ ne peut être contenu comme sous-groupe dans Γ_μ . Nous dirons pour exprimer ce fait que Γ_μ est un sous-groupe de classe n .

Le groupe $G_{\{n\}}$ des opérations $1, W_1, W_2, \dots$, du paragraphe 13 présente avec le groupe modulaire un isomorphisme de mériedrie infiniment élevée. Ici aux sous-groupes de $G_{\{n\}}$ correspondent avec réciprocité et sans ambiguïté les sous-groupes de $n^{\text{ième}}$ classe du

groupe modulaire. Aussi, au lieu d'étudier directement les sous-groupes de $n^{\text{ième}}$ classe du groupe modulaire, nous pourrions étudier les sous-groupes du groupe $G_{\{n\}}$. Dans cette étude, la division triangulaire $(2, 3, n)$ jouera le même rôle que la division modulaire pour le groupe modulaire total ; et l'on pourra employer toutes les définitions et tous les procédés introduits à propos du groupe modulaire.

Les considérations ci-dessus prennent une grande importance pour l'étude des polygones fondamentaux des groupes de $n^{\text{ième}}$ classe. Soit Γ_μ un sous-groupe d'indice fini et de classe n du groupe modulaire dont le polygone fondamental dans le plan des ω est F_μ . Transportons maintenant, au moyen de la relation établie entre le plan ω et la division $(2, 3, n)$, ce polygone sur cette division. Deux doubles triangles F_μ ne peuvent être étendus sur le même double triangle de $(2, 3, n)$. Ces deux doubles triangles seraient en effet équivalents par rapport à Γ_μ et n'appartiendraient pas tous deux au polygone F_μ . On obtient ainsi un polygone F'_μ de la division $(2, 3, n)$ se composant de μ doubles triangles. Ses courbes limites sont conjuguées l'une à l'autre par les opérations de $G_{\{n\}}$, qui par isomorphisme sont conjuguées à certaines des génératrices de Γ_μ . *F'_μ est donc polygone fondamental du sous-groupe de $G_{\{n\}}$ qui est conjugué à Γ_μ .* Tout comme dans le plan des ω , par la reproduction répétée de F'_μ fondée sur la correspondance des arêtes, nous arriverons à recouvrir complètement, et une seule fois, la division $(2, 3, n)$ avec des polygones F'_μ . En effet, on aura déjà remarqué que le polygone F'_μ satisfait aux conditions d'un théorème analogue à celui de la ramification et relatif à la division $(2, 3, n)$; ce dernier s'énoncera tout comme pour la division modulaire, avec cette différence que, pour les points c , s'ajoutera une nouvelle condition. Le nombre des triangles qui sur la surface fermée φ_μ entourent un point c sera nécessairement un diviseur de n . C'est précisément à ce point de vue qu'a été introduite la division des sous-groupes en classes.

Toute l'utilité de cette considération est fondée sur la différence

entre les formes des deux polygones F_μ , F'_μ . Comme on l'a déjà remarqué, pour la plupart des usages du polygone fondamental, seules les positions relatives des triangles le composant ont de l'importance, de sorte que F'_μ peut servir aussi bien que F_μ . Il y a avantage dans l'emploi de F'_μ , parce que sa forme est plus facile à apercevoir; au point de vue pratique, et dès que μ a une valeur un peu élevée, l'emploi de F'_μ vaut celui de F_μ et est aussi compliqué.

§ 15. — *Transformation du polygone fondamental F_μ ou de la surface fermée φ_μ en une surface de Riemann.*

Soit Γ_μ un sous-groupe quelconque d'indice fini μ du groupe modulaire. Considérons un polygone fondamental F_μ de ce sous-groupe, et replions-le de façon à former la surface φ_μ . Nous imaginons qu'en chaque point du polygone primitif est attachée la valeur propre de $J(\omega)$ correspondante, de sorte que le point correspondant de φ_μ est aussi muni de cette valeur J . Les valeurs de J ainsi transportées sur φ_μ varieront d'une manière continue, si l'on se déplace sur la surface, sauf aux points c pour lesquels la valeur de J deviendra infinie.

Une valeur complexe particulière J n'aura lieu en tout qu'en μ points de la surface, qui sont homologues dans les μ doubles triangles de la division φ_μ . Nous pouvons à ce point de vue appeler J une fonction μ -valente (μ -werthig) de la surface φ_μ . Ces μ points de la surface ayant même J sont séparés les uns des autres, lorsque la valeur de J correspondante est différente de $0, 1, \infty$. Il n'y a coïncidence partielle des μ points que pour les valeurs particulières de J , $J=1, 0, \infty$, c'est-à-dire aux points a, b, c . De la position relative des triangles sur φ_μ résulte aussitôt que : les μ points φ_μ avec $J=1$ sont tous séparés les uns des autres, ou bien ils coïncident en totalité ou en partie par couples de deux; les μ points avec $J=0$ ou bien sont tous séparés, ou bien ils coïncident partiel-

lement ou en totalité trois par trois; enfin les μ points de φ_μ avec $J=\infty$ se rassemblent, en nombre quelconque, aux différents points c .

A l'aide des valeurs de J qu'elle porte, effectuons sur le plan de la variable complexe J la représentation conforme de la surface φ_μ . J étant une fonction μ -valente de φ_μ nous apercevons aussitôt que la représentation conforme de φ_μ sur le plan des J est une surface de Riemann à μ feuillets que nous appellerons F_μ , suivant l'usage reçu. Les μ triangles ombrés de la surface fermée φ_μ , dont chacun dans sa position dans le plan des ω était une image du demi plan positif des J , nous donnent maintenant de nouveau les μ demi feuillets positifs de la surface de Riemann F_μ , de même les triangles blancs donnent les μ feuillets négatifs de notre surface.

Mais il est remarquable que nous pouvons immédiatement donner des indications précises sur la ramification de la surface à plusieurs feuillets ainsi obtenue. Nous avons d'abord le résultat : *pour un J différent de $1, 0, \infty$, les μ feuillets sont isolés*; car, sur la surface φ_μ , une valeur de J différente de $1, 0, \infty$ a toujours lieu en μ points séparés.

Les points de ramification ne peuvent se présenter qu'aux trois points $J=1, 0, \infty$, et, pour ces points, on a immédiatement ce qui suit : *pour $J=1$, un feuillet particulier de notre surface de Riemann F_μ ou bien est isolé, ou bien est lié à un deuxième feuillet*; *pour $J=0$, ou bien un feuillet est isolé, ou bien il forme un cycle avec deux autres feuillets*; *enfin les ramifications se présentant pour $J=\infty$ ne peuvent être indiquées d'une manière plus précise, les feuillets pouvant s'y réunir d'une manière quelconque.*

Le genre p que l'on doit attribuer à la surface de Riemann est évidemment le même que celui de la surface φ_μ qui est applicable sur elle (au point de vue de la géométrie de situation, bien entendu). Or, ce genre est précisément celui attribué au sous-groupe Γ_μ . Le genre du groupe est donc le nombre qui exprime le genre de la surface de Riemann correspondante.

On sait d'autre part qu'une surface de Riemann à plusieurs feuillets peut toujours sans déchirure être transformée en une surface de

l'espace simplement recouverte ⁽¹⁾ ; d'après cela toutes les surfaces de Riemann ayant aux points $J = 1, 0, \infty$ la ramification caractérisée ci-dessus donneront des surfaces fermées de l'espace dont la division en μ doubles triangles satisfait aux conditions du théorème de la ramification : on a donc le théorème : *toute surface de Riemann à μ feuillets de l'espèce considérée et de genre p , construite sur le plan des J , définit de la même manière que la surface φ_μ un système de sous-groupes semblables Γ_μ d'indice μ et de genre p .*

§ 16. — *Les fonctions de la surface de Riemann F_μ considérées comme fonctions du rapport des périodes ω ⁽²⁾.*

Pour distinguer dans ce qui va suivre la surface de Riemann F_μ du polygone fondamental du groupe Γ_μ construit sur le plan des ω , nous désignons cette surface par $F_\mu^{(J)}$ et le polygone fondamental par $F_\mu^{(\omega)}$.

La surface $F_\mu^{(J)}$ possède comme on sait des intégrales et des fonctions algébriques. Ces fonctions de $F_\mu^{(J)}$ considérées comme fonctions du rapport des périodes ω jouissent de propriétés remarquables que nous nous proposons d'établir. Nous devons, à cet effet, étudier préalablement la fonction $\omega(J)$ sur la surface $F_\mu^{(J)}$. Nous prenons dans cette étude la surface φ_μ de l'espace pour intermédiaire. Imaginons les valeurs de ω ayant lieu dans le triangle fondamental de $F_\mu^{(\omega)}$ transportées comme fonctions de J sur le feuillet correspondant de $F_\mu^{(J)}$, et prolongeons analytiquement cette fonction de J sur la surface. Les propriétés fondamentales de cette fonction de J seront les suivantes. La fonction $\omega(J)$ est uniforme et continue dans le voisinage de tout point de la surface φ_μ de l'espace, excepté aux sommets a, b, c de la division triangulaire. Si en un point a la

(1) Voir Klein : *Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Teubner, Leipzig, 1882).

(2) Pour les paragraphes 15 à 18 inclus, voir Klein, *Vorlesungen*, 3^e partie, chap. III, vol. I.

valeur qui a lieu est ω_0 , on a, comme on le sait, dans une première approximation $\omega - \omega_0 = c_1 \sqrt{J-1}$; tandis que, pour un point b , on a $\omega - \omega_0 = c_0 \sqrt[3]{J}$; $\omega(J)$ est donc aussi uniforme et continue dans le voisinage d'un point a (ou d'un point b), pourvu que ce point soit entouré de quatre (ou de six) triangles élémentaires. Dans le cas contraire, $\omega(J)$ est ramifié de telle façon que deux branches (ou trois) de $\omega(J)$ forment un cycle au point a (ou au point b) correspondant. Si enfin, en un point c , $\omega(J)$ a la valeur $\frac{\alpha}{\gamma}$, α et γ étant entiers, on a dans une première approximation

$$\left(\omega - \frac{\alpha}{\gamma} \right) = \frac{2\pi i}{\gamma^2 \log J}.$$

J étant infini algébrique d'ordre ν , en désignant par 2ν le nombre des triangles élémentaires qui entourent le dit point c . Puisque ω ou une fonction linéaire de ω convenablement choisie deviendra infinie logarithmique en c , tout point c est pour la fonction $\omega(J)$ un point de ramification logarithmique pour lequel une infinité de branches de cette fonction sont reliées les unes aux autres.

Introduisons maintenant les propriétés de $\omega(J)$ qui résultent de la périodicité de l'intégrale elliptique de première espèce. Nous obtenons ainsi le théorème fondamental suivant : *la fonction analytique $\omega(J)$ éprouve une substitution linéaire fractionnaire à coefficients entiers de déterminant 1 lorsqu'on décrit sur φ_μ un chemin fermé quelconque.* Nous allons introduire maintenant une décomposition (Zerschneidung) de la surface φ_μ telle que, sur la surface φ_μ découpée, $\omega(J)$ sera une fonction uniforme de sa position. Nous aurons ainsi isolé une branche de la fonction analytique $\omega(J)$. Nous construirons à cet effet un système normal de coupures de φ_μ se composant de $3p$ lignes ; si nous tenons compte en outre de ce que $\omega(J)$ est ramifié aux points c de φ_μ , et peut-être aussi en certains points a et b , nous tracerons de chacun de ces points de ramification jusqu'au système de coupures déjà tracé une nouvelle coupure, les coupures additionnelles étant tracées de façon à ne pas se croiser et à ne point coïncider en partie. Les deux bords de toutes les cou-

pures ainsi tracées nous donnent pour la limite de la surface fermée ainsi découpée une courbe fermée sur elle-même.

De la correspondance réciproque entre la surface φ_μ et le demi plan ω résulte maintenant très facilement que $\omega(J)$ limité à la surface ainsi découpée φ_μ dépend uniformément de sa position. La valeur de ω ayant lieu sur l'un des bords de l'une des coupures sera une fonction linéaire de la valeur ayant lieu au même point du bord opposé, cette fonction linéaire restant la même pour tout morceau d'une même coupure, compris entre les points d'amorce de deux autres coupures sur la première. Faisons maintenant la représentation conforme de la surface φ_μ ainsi découpée sur le plan des ω , en prenant la branche de $\omega(J)$ ainsi isolée pour intermédiaire. Nous serons évidemment ramenés au polygone fondamental $F_\mu^{(\omega)}$ du groupe Γ_μ , soit sous sa forme primitive, soit sous une forme qui s'en déduit par déformation permise. Comme nous possédons dans $\omega(J)$ une fonction multivalente de $F_\mu^{(j)}$, les différentes branches de $\omega(J)$ que l'on peut atteindre par prolongement analytique nous donneront comme images de la surface découpée φ_μ une infinité de polygones qui recouvriront le demi plan ω une seule fois et sans lacune.

Nous avons ainsi obtenu l'expression analytique de la correspondance entre φ_μ et le demi plan ω . Remarquons qu'il s'agit maintenant d'une relation conforme parfaitement déterminée entre $F_\mu^{(j)}$ et le demi plan des ω , contrairement à ce qui avait lieu dans les paragraphes 7, 11 et 12.

Revenons maintenant aux fonctions de la surface $F_\mu^{(j)}$. Soient z une fonction algébrique de la surface et j une intégrale de première espèce; nous les considérons comme fonctions de ω et nous les écrivons d'une manière plus précise $z(\omega)$, $j(\omega)$. De ce qui précède résulte que les images en nombre infini de la surface $F_\mu^{(j)}$ convenablement découpée, qui correspondent aux différentes branches de $\omega(J)$, se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par l'emploi des substitutions $\omega' = v_k(\omega)$ qui forment le groupe Γ_μ . Mais de plus tout chemin fermé tracé à l'intérieur du demi plan des ω peut toujours se réduire à un point sans déchirure. D'après la correspondance existant entre φ_μ et le demi plan ω , à un chemin fermé du

du demi plan ω correspond nécessairement un chemin fermé de φ_μ qui peut se réduire à un point. De là le résultat : *un circuit périodique proprement dit de $F_\mu^{(j)}$ donne toujours naissance, de quelle manière qu'on le transporte sur le demi plan ω , à un chemin qui joint deux points équivalents par rapport à Γ_μ , mais non identiques.*

Considérons maintenant le feuillet de $F_\mu^{(j)}$ qui correspond au triangle fondamental de l' ω demi plan. On transporte les valeurs complexes de z, j qui y ont lieu sur le plan des ω , en les considérant comme fonctions de ω ; et on construit par prolongement analytique les fonctions $z(\omega)$ et $j(\omega)$; à cet effet on trace sur $F_\mu^{(j)}$ un chemin quelconque partant d'un point du feuillet initial et on transporte ce chemin et les valeurs de z et j correspondantes sur le demi plan des ω . Quelle que soit la manière dont nous opérerons ce transport, nous resterons toujours dans le demi plan positif des ω ; mais nous pourrons toujours atteindre un point quelconque de celui-ci, par un choix convenable du chemin tracé sur $F_\mu^{(j)}$. De là résulte que *les fonctions $z(\omega)$ et $j(\omega)$ existent seulement à l'intérieur du demi plan positif, et possèdent l'axe réel comme limite naturelle.*

Supposons maintenant qu'en un point ω_0 du demi plan ω on ait atteint par prolongement analytique pour $z(\omega), j(\omega)$ les valeurs z_0, j_0 et décrivons dans le demi plan des ω , à partir de ω_0 , un chemin fermé quelconque qui nous ramène au point ω_0 . Transporté sur la surface φ_μ , ce chemin se transforme en un chemin fermé qui, sans déchirure, peut se réduire à un point. Comme nous avons atteint dans le demi plan ω le même point ω_0 , z et j ont repris les mêmes valeurs; en tout point du demi plan ω , les fonctions $z(\omega), j(\omega)$ ont une valeur déterminée et *les fonctions $z(\omega)$ et $j(\omega)$ sont des fonctions uniformes de l'argument ω dans le domaine où elles existent.*

Utilisons enfin cette circonstance qu'un chemin fermé quelconque de φ_μ se transforme en un chemin joignant deux points équivalents relatifs et que réciproquement tout chemin joignant deux points équivalents relatifs donne sur la surface φ_μ un chemin fermé. Il en résulte manifestement que : *la fonction $z(\omega)$ demeure inva-*

riable lorsqu'on transforme son argument ω suivant une substitution appartenant à Γ_μ ; $j(\omega)$ au contraire prend vis-à-vis de la substitution v_k une constante additive parfaitement déterminée de sorte que l'on a :

$$z[v_k(\omega)] = z(\omega) \quad , \quad j[v_k(\omega)] = j(\omega) + c_k .$$

§ 17. — *Les fonctions $z(\omega)$ et $j(\omega)$ considérées comme fonctions modulaires.*

Nous nous occupons ici plus spécialement des fonctions $z(\omega)$. Supposons que $z(\omega)$ soit une fonction m -valente sur la surface de Riemann $F_\mu^{(j)}$. Si nous étendons alors par un procédé quelconque $F_\mu^{(j)}$ sur un polygone fondamental $F_\mu^{(\omega)}$ de F_μ , à côté des caractères déjà indiqués plus haut pour $z(\omega)$, nous trouvons que cette fonction ne possède à l'intérieur du polygone $F_\mu^{(\omega)}$ aucun point singulier essentiel, et qu'elle prend au contraire m fois une valeur complexe quelconque, m étant un entier qui est le même quelle que soit la valeur complexe considérée; elle possède à l'intérieur du polygone $F_\mu^{(\omega)}$ les caractères d'une fonction rationnelle. Mais il faut s'entendre sur l'expression : « prend m fois une valeur quelconque dans l'intérieur du polygone fondamental $F_\mu^{(\omega)}$ ». On sait que, dans le voisinage d'un point J_0 de la surface $F_\mu^{(j)}$ où z prend la valeur z_0 , $z - z_0$ comporte un développement en série de la forme

$$z - z_0 = a_1(J - J_0) + a_2(J - J_0)^2 + \dots ,$$

où $z - z_0$ n'est autre que $\frac{1}{z}$ pour $z = \infty$, $J - J_0$ ayant la signification $\frac{1}{J}$ pour $J_0 = \infty$, tandis que par $J - J_0$ on doit entendre $\sqrt[\nu]{J - J_0}$ pour le voisinage d'un point de ramification J_0 dans le cas d'un cycle de ν feuillets.

Si dans un développement de cette nature on introduit à la place

de $J - J_0$ son expression en $(\omega - \omega_0)$ sous forme de série, on trouve sans aucune difficulté que, pour tout point ω_0 du demi plan positif des ω qui n'est pas un sommet de triangle dans la division modulaire, ou en un point équivalent avec i ou avec ρ , correspondant sur la surface φ_μ à un sommet du réseau entouré de quatre ou six triangles élémentaires, $z(\omega)$ comporte un développement en série de la forme :

$$(1) \quad z - z_0 = \alpha_1(\omega - \omega_0) + \alpha_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots + \alpha_n(\omega - \omega_0)^n + \dots$$

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ et $\alpha_n \neq 0$, on dira que z , au point ω_0 , prend n fois la valeur z_0 .

Si ω_0 est un point équivalent à i , entouré sur la surface φ_μ de deux triangles élémentaires seulement, le développement est de la forme :

$$(2) \quad z - z_0 = \alpha_1(\omega - \omega_0)^2 + \alpha_2(\omega - \omega_0)^4 + \dots + \alpha_n(\omega - \omega_0)^{2n} + \dots$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n \neq 0$, on dira que $z - z_0$ prend en ω_0 n fois la valeur z_0 .

Pour un point équivalent à ρ , entouré seulement de deux triangles élémentaires sur φ_μ , on a

$$(3) \quad z - z_0 = \alpha_1(\omega - \omega_0)^3 + \alpha_2(\omega - \omega_0)^6 + \dots + \alpha_n(\omega - \omega_0)^{3n} + \dots,$$

et z prend n fois la valeur z_0 pour $\omega = \omega_0$, si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ et $\alpha_n \neq 0$.

Enfin, en un sommet $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ réel rationnel, en posant

$$\gamma' = e^{2\pi i} \frac{\delta\omega - \beta}{-\gamma\omega + \alpha},$$

et en désignant par 2ν le nombre des triangles élémentaires qui sur φ_μ entourent le point c correspondant à $\omega_0 = \frac{\alpha}{\gamma}$, on aura

$$(4) \quad z - z_0 = \alpha_1 \gamma'^{\frac{1}{\nu}} + \alpha_2 \gamma'^{\frac{2}{\nu}} + \dots$$

$z(\omega)$ prendra alors, à l'intérieur du polygone $F_{\mu}^{(\omega)}$ au dit sommet $\omega_0 = \frac{\alpha}{\gamma}$, n fois la valeur z_0 si le premier exposant dans le développement est $\frac{n}{\gamma}$.

Dire que z ne possède sur le polygone fondamental aucun point singulier essentiel, c'est dire que $z(\omega)$ comporte toujours des développements (1), (2), (3) ou (4).

La fonction $z(\omega)$ est une fonction analytique uniforme de ω n'existant que dans le demi plan positif, qui demeure invariable quand on emploie sur son argument ω les substitutions du groupe Γ_{μ} ; elle prend d'ailleurs m fois une valeur quelconque, ∞ par exemple, sur le polygone $F_{\mu}^{(\omega)}$, m étant un entier quelconque. La fonction $z(\omega)$ est d'ailleurs parfaitement définie par ces propriétés, comme il résulte des théorèmes bien connus de la théorie des fonctions algébriques sur la surface de Riemann F_{μ}^1 .

La fonction $z(\omega)$ possède donc tous les caractères d'une fonction modulaire; de là le théorème: *pour tout sous-groupe Γ_{μ} d'indice fini μ , il existe des fonctions modulaires elliptiques, savoir les fonctions $z(\omega)$, et il n'y en a pas d'autres que celles-là.*

Nous étudions maintenant les relations qui ont lieu entre toutes les fonctions modulaires elliptiques qui appartiennent à un groupe Γ_{μ} . Il est évident qu'entre ces fonctions subsistent les relations ayant lieu entre les fonctions algébriques correspondantes de la surface F_{μ}^1 . Nous avons ainsi le théorème suivant qui s'applique à tous les sous-groupes Γ_{μ} d'indice fini μ :

On peut, parmi les fonctions modulaires algébriques qui appartiennent à Γ_{μ} , en choisir une m -valente (m entier quelconque) telle que si z_0 et J_0 sont les valeurs des fonctions $z(\omega)$ et $J(\omega)$ se présentant en un point ω_0 du polygone fondamental, les mêmes valeurs z_0 et J_0 de z et J ne peuvent se trouver associées en aucun autre point du polygone fondamental de Γ_{μ} . La fonction z est alors liée à J par une équation algébrique irréductible $f(z, J) = 0$, dans laquelle z s'élève au degré μ et J au degré m . Toute autre fonction modulaire appartenant

à Γ_μ , ou, comme on dit, tout autre module de Γ_μ , z_1 s'exprime alors rationnellement en z et J

$$z_1 = R(z, J).$$

L'équation $f(z, J) = 0$ est une résolvante de l'équation modulaire, résolvante correspondant au groupe Γ_μ ⁽¹⁾.

Si en particulier Γ_μ appartient au genre 0, on choisira pour $z(\omega)$ une *fonction fondamentale* de $F_\mu^{(J)}$; $z(\omega)$ est alors une fonction modulaire qui réalise la représentation conforme du polygone fondamental $F_\mu^{(\omega)}$ sur le plan des z simplement recouvert.

Si Γ_μ est de genre p , on prendra les p fonctions algébriques

$$z_1(\omega) = \frac{dj_1}{dJ}, \quad z_2(\omega) = \frac{dj_2}{dJ}, \quad \dots, \quad z_p(\omega) = \frac{dj_p}{dJ},$$

$j_1, j_2, \dots, j_p$ étant les p intégrales de première espèce de la surface $F_\mu^{(J)}$; et ces p fonctions modulaires appartenant à Γ_μ , qui sont liées à J par p relations algébriques, permettront d'exprimer rationnellement toutes les fonctions modulaires elliptiques de Γ_μ .

§ 18. — Généralités sur les modules des sous-groupes semblables et des sous-groupes invariants.

Soit la fonction modulaire algébrique $z(\omega)$ qui demeure invariable par les substitutions du groupe Γ_μ d'indice fini μ ; z est lié à J par l'équation irréductible de degré μ en z

$$(1) \quad f(z, J) = 0.$$

$z(\omega), J(\omega)$ forment un *système complet de modules* de Γ_μ . Soient $1, v_1, v_2, \dots$ les opérations de Γ_μ , $1, V_1, V_2, \dots, V_{\mu-1}$ un système de substitutions représentantes de Γ_μ . L'équation (1) est satisfaite

(1) Voir Klein : *Vorlesungen über das Icosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* (Leipzig, 1884), 1^{re} partie, chap. IV.

quel que soit ω et reste vérifiée si on remplace ω par $V(\omega)$, où V est une substitution modulaire quelconque de première espèce. Mais par cette transformation J demeure invariable, de sorte que $\mathcal{z}[V(\omega)]$ est une racine de l'équation (1) tout comme $\mathcal{z}(\omega)$. Dans la totalité des grandeurs $\mathcal{z}[V(\omega)]$ il n'y en a évidemment que μ différentes : $\mathcal{z}(\omega)$, $\mathcal{z}[V_1(\omega)]$, $\mathcal{z}[V_2(\omega)]$, ..., $\mathcal{z}[V_{\mu-1}(\omega)]$ que nous désignons respectivement par $\mathcal{z}_0(\omega)$, $\mathcal{z}_1(\omega)$, $\mathcal{z}_2(\omega)$, ..., $\mathcal{z}_{\mu-1}(\omega)$. Les grandeurs $\mathcal{z}_k$ ($k=0, 1, 2, \dots, \mu-1$) sont donc les racines de l'équation irréductible (1).

De l'équation $\mathcal{z}(v_i V_k(\omega)) = \mathcal{z}(V_k(\omega))$ on tire d'ailleurs

$$\mathcal{z}_k[V_k^{-1} v_i V_k(\omega)] = \mathcal{z}_k(\omega).$$

De là ce résultat :

$\mathcal{z}_k(\omega)$ est une fonction modulaire algébrique qui demeure invariable par les opérations du sous-groupe $\Gamma_\mu^{(k)} = V_k^{-1} \Gamma_\mu V_k$, semblable avec Γ_μ , et seulement par celles-là (d'après la définition même de $\mathcal{z}(\omega)$) ; on dira d'après cela que les grandeurs $\mathcal{z}_k(\omega)$ [$k=0, 1, \dots, \mu-1$] sont des fonctions modulaires *semblables* à $\mathcal{z}(\omega)$.

Supposons que le groupe Γ_μ soit *invariant* dans le groupe modulaire. Les μ grandeurs $\mathcal{z}_k$ appartiennent au même sous-groupe Γ_μ comme modules, et, par suite, s'expriment en fonction rationnelle de l'une quelconque d'entre elles et de J , de sorte que

$$(2) \quad \mathcal{z}_k = R_k(\mathcal{z}, J),$$

R_k étant une fraction rationnelle en $\mathcal{z}$ et J .

Si nous concevons encore $\mathcal{z}$ comme une fonction algébrique de $F_\mu^{(J)}$, $\mathcal{z}$, $\mathcal{z}_1$, ..., $\mathcal{z}_{\mu-1}$ sont les μ branches de cette fonction. On peut alors caractériser un point de la surface de Riemann par un système particulier de valeurs $\mathcal{z}, J$. Si à l'aide de la relation (2), nous transformons le point $\mathcal{z}, J$ dans le point $\mathcal{z}_k, J$ correspondant, la surface entière se transformera en elle-même, de sorte que l'on a le théorème : *les μ transformations en elle-même de la surface régulière à μ feuillets $F_\mu^{(J)}$ s'expriment analytiquement par les formules (2).*

Enfin, les racines de l'équation (1) s'exprimant toutes en fonction rationnelle de l'une quelconque d'entre elles, la résolvante (1) de l'équation modulaire admet comme résolvante de Galois l'équation (1) elle-même.

Dans le cas où l'on prend pour systèmes de modules du groupe invariant Γ_μ de genre p les p fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_p$ où $\varphi_k = \frac{dj_k}{dJ}$, ces résultats prennent une forme remarquable. Tout module $\varphi_i(V_k(\omega))$ semblable avec $\varphi_i = \frac{dj_i}{dJ}$ est également un module φ du sous-groupe invariant Γ_μ , et comme tel il s'exprime linéairement et sous forme homogène à l'aide des $\varphi_i(\omega)$. Pour le système total des modules φ , nous obtenons donc, correspondant à la substitution V_k , une substitution linéaire homogène à coefficients constants de la forme

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1^{(k)} &= \alpha_{41}^{(k)} \varphi_1 + \alpha_{42}^{(k)} \varphi_2 + \dots + \alpha_{4p}^{(k)} \varphi_p \\ \varphi_2^{(k)} &= \alpha_{21}^{(k)} \varphi_1 + \alpha_{22}^{(k)} \varphi_2 + \dots + \alpha_{2p}^{(k)} \varphi_p \\ &\vdots \\ \varphi_p^{(k)} &= \alpha_{p1}^{(k)} \varphi_1 + \alpha_{p2}^{(k)} \varphi_2 + \dots + \alpha_{pp}^{(k)} \varphi_p \end{aligned} \right.$$

A chacune des opérations V_k correspond donc une substitution bien déterminée des modules φ . Les μ substitutions prenant ainsi naissance forment un groupe G_μ d'ordre fini μ , qui nous donne dans le cas présent une *très-élégante expression analytique* pour le sous-groupe fini G_μ qui correspond à Γ_μ (§ 6).

Tout ce qui précède est dû, comme nous l'avons dit, à M. F. Klein. Les théories générales qui viennent d'être exposées sont susceptibles d'un très grand nombre d'applications fort importantes, mais dont l'exposition nous entraînerait en dehors du plan de nos recherches.

CHAPITRE II

LES DIX SURFACES DE RIEMANN F_{11} ET LES DIX SYSTÈMES DE SOUS-GROUPES QUI LEUR CORRESPONDENT

Nous nous proposons dans ce chapitre de déterminer le nombre et la nature des surfaces de Riemann qui ont la même ramification que celle que l'on rencontre dans le problème de la transformation du onzième ordre des fonctions modulaires elliptiques, et qui appartient à la résolvante du onzième degré de ce problème, et d'étudier les sous-groupes du groupe modulaire qui leur correspondent en vertu du théorème de la ramification. M. Klein, dans son mémoire : *Über die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen* (*Math. Ann.*, vol. XV, p. 533), a montré rapidement que ce nombre est 10. Nous arrivons à ce résultat par deux méthodes ; la première, fondée sur l'emploi d'idées générales émises par M. Hurwitz (*Math. Annalen*, vol. XXXIX, 1891, p. 1) nous conduit à caractériser les dix surfaces par les substitutions génératrices de leur groupe de monodromie ; la seconde est fondée essentiellement sur ce que ces surfaces, et par suite les sous-groupes correspondants sont du genre 0 ; elle nous permet de déterminer les polygones fondamentaux de ces sous-groupes, et de passer ensuite à l'étude arithmétique de ces sous-groupes, de leur isomorphisme, etc. Cette seconde méthode ne diffère de celle de M. Klein (qui n'a d'ailleurs indiqué dans son Mémoire que les résultats) qu'en

ce que ce dernier emploie pour caractériser les sous-groupes correspondants les polygones fondamentaux représentés sur le plan de la division $(2, 3, 11)$ (voir § 14), et passe de là à la ramification des surfaces à onze feuillets F_{11} . L'application des deux méthodes n'exige d'ailleurs que des considérations tout à fait élémentaires.

§ 19. — *Méthode de M. Hurwitz*
pour déterminer toutes les surfaces de Riemann ayant une
ramification donnée.

M. Hurwitz a donné, dans les *Mathematische Annalen*, une méthode remarquable pour déterminer le nombre total des surfaces de Riemann ayant une ramification donnée.

Les formules qu'il obtient (voir *Math. Annalen*, vol. XXXIX, 1891, pages 1 à 63) sont d'une application immédiate difficile, car elles comportent le calcul long et pénible d'un certain nombre de coefficients numériques ; elles ne donnent d'ailleurs que le nombre total des surfaces dont la ramification est équivalente à w points simples de ramification et ne permettent pas de caractériser immédiatement les différentes solutions du problème. Aussi exposons-nous seulement dans le présent paragraphe les idées générales de la méthode de M. Hurwitz, nous réservant d'en faire, dans les paragraphes suivants, l'application directe au cas qui nous intéresse.

Dans la question actuelle, il est essentiel de concevoir la surface de Riemann comme une figure purement géométrique, indépendamment des fonctions qui peuvent exister sur cette surface. D'après cette manière de voir, les solutions du problème proposé, qui est de déterminer les surfaces de ramification donnée, consisteront en images (Gebilde) géométriques ; et l'on ne retombera dans le domaine des nombres que si, à la place de la surface (figure géométrique) on prend pour inconnues du problème des nombres dont un système de valeurs caractérise complètement une surface particulière.

On conçoit donc de la manière suivante l'une quelconque des surfaces de Riemann à n feuillets, ramifiées aux w points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_w$ du plan P des quantités complexes. Considérons dans le plan P un point O qui ne soit pas l'un des points de ramification (fig. 4). On le joint aux w points de ramification $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_w$ par

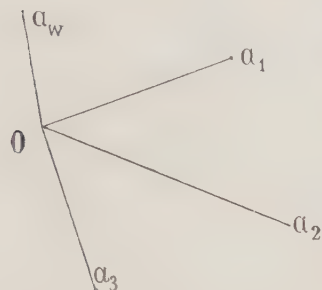


Fig. 4.

les w lignes $l_1, l_2, \dots, l_w$ tracées de telle façon que deux quelconques de ces lignes ne se coupent qu'au point O . On imagine le plan P fendu suivant ces w lignes. Le plan ainsi modifié et limité par les $2w$ bords des w coupures sera désigné par Π . La succession des lignes $l_1, l_2, \dots, l_w$ sera telle que si l'on tourne autour du point O

dans le sens des aiguilles d'une montre, les bords des coupures se présentent dans l'ordre $l_1^{+1}, l_1^{-1}, l_2^{+1}, l_2^{-1}, \dots, l_w^{+1}, l_w^{-1}$, en désignant par l_i^{+1} le bord positif (à la gauche) de la coupure $O\alpha_i$ (supposée parcourue de O vers α_i) et par l_i^{-1} le bord négatif (droit) de cette coupure.

On construit ensuite n plans identiques à Π , on les pose les uns sur les autres de façon à ce que les coupures $O\alpha_i$ des n plans coïncident ; et on désigne ces plans dans un ordre quelconque sous le nom de premier, second, $\dots$, $n^{\text{ième}}$ feuillet. On obtiendra une surface de Riemann en reliant les n feuillets le long des coupures $l_1, l_2, \dots, l_w$ de la manière suivante : à chacune des lignes $l_1, l_2, l_3, \dots, l_w$ est conjuguée une certaine substitution des n premiers nombres entiers. Soient $S_1, S_2, \dots, S_w$ ces substitutions. Si l'on a par exemple

$$S_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}^{(1)},$$

on soude le long de la coupure l_k le bord positif des feuillets

(1) On emploie ici la notation de Serret pour les substitutions. Voir *Algèbre supérieure*, tome II (4^e édition).

$1, 2, 3, \dots, n$ respectivement avec le bord négatif des feuillets $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ de sorte qu'après un tour autour du point k on passe du feuillet i au feuillet α_i en changeant de bord.

Les substitutions $S_1, S_2, \dots, S_w$ qui serviront à définir une surface de Riemann devront jouir des propriétés suivantes :

I. Les permutations doivent être telles que l'on puisse passer d'un feuillet quelconque à un autre feuillet quelconque, la surface devant former un tout continu.

II. La combinaison de toutes les permutations doit donner la permutation identique, c'est-à-dire que l'on a

$$S_1, S_2, \dots, S_w = 1.$$

La première de ces conditions peut s'exprimer autrement : il doit exister une substitution S combinaison de $S_1, S_2, \dots, S_w$ telle que l'un quelconque des nombres $1, 2, 3, \dots, n$ y occupe une position quelconque ; en un mot, le groupe de substitutions, qui a pour génératrices $S_1, S_2, \dots, S_w$, doit être *transitif*.

D'après la seconde condition, si l'on effectue un tour complet autour du point O de la surface, on retombe sur le feuillet initial.

De ce qui précède résulte qu'une surface de Riemann sera entièrement déterminée si l'on se donne :

- a) Les points de ramification $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_w$,
- b) Le point O et les lignes qui s'en détachent l_1, l_2, l_w ,
- c) Le numérotage des n feuillets Π ,
- d) Les substitutions conjuguées aux lignes $l_1, l_2, \dots, l_w$.

Considérons deux surfaces de Riemann F et F' à n feuillets, présentant la même ramification, c'est-à-dire pour lesquelles les conditions a) coïncident. Nous supposons dans le plan Π un point M différent d'un point de ramification, et nous parcourons, en partant du point M , un chemin W qui ne passe par aucun point de ramification. Si l'on peut numéroter les feuillets de la deuxième surface F' de telle sorte que, sur tout chemin W , les feuillets de F'

éprouvent la même permutation que les feuillets de F , les deux surfaces seront regardées comme non distinctes. Dans les autres cas les deux surfaces sont différentes. On montre sans difficulté que, si deux surfaces se présentent d'après cette définition comme non distinctes par rapport à un point M , elles sont encore non distinctes si l'on remplace le point M par un point quelconque N .

Il résulte de là que l'on obtiendra toutes les surfaces différentes ayant les mêmes ramifications en fixant une fois pour toutes les éléments qui figurent dans les trois premières conditions $a)$, $b)$, $c)$ et en satisfaisant à la quatrième condition, c'est-à-dire en choisissant $S_1, S_2, \dots, S_w$ de toutes les manières possibles.

Ainsi nous obtiendrons toutes les surfaces de Riemann ayant la ramification donnée si nous établissons tous les systèmes de w substitutions $S_1, S_2, \dots, S_w$ qui satisfont aux conditions I et II (page 60).

A deux systèmes différents de cette espèce $S_1, S_2, \dots, S_w$ et $S'_1, S'_2, \dots, S'_w$ ne correspondra la même surface de Riemann que si les deux systèmes sont transformables l'un dans l'autre, c'est-à-dire s'il y a une substitution T telle que l'on ait :

$$S_1 = TS'_1T^{-1}, S_2 = TS'_2T^{-1}, \dots, S_w = TS'_wT^{-1}.$$

Car, dans ce cas seulement, par un numérotage convenable des feuillets, on peut faire en sorte que sur tout chemin mené par un point O les feuillets des deux surfaces éprouvent la même permutation.

Nous résumons ces développements dans le théorème suivant :

Si on a fixé les lignes l_1, l_2, l_w qui conduisent d'un point quelconque O aux points de ramification $a_1, a_2, \dots, a_w$, les surfaces de Riemann à ramification donnée correspondent aux systèmes de w substitutions qui satisfont aux conditions I et II (page 60), avec cette restriction que deux systèmes transformables l'un dans l'autre donnent une seule et même surface.

Si nous considérons en particulier une surface de Riemann à n feuillets ($S_1, S_2, \dots, S_w$) avec les points de ramification $a_1,$

$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_w$ la substitution S_i donne immédiatement la nature de la ramification au point α_i , c'est-à-dire que la substitution S_i permet de reconnaître en combien de cycles les feuillets sont disposés en α_i et combien de feuillets embrasse chaque cycle. Par exemple le point α_i sera un point de ramification simple si S_i est une simple transposition de deux éléments; le feuillet g sera isolé en α_i si dans S_i l'élément g se correspond à lui-même; etc.

Ainsi pour déterminer toutes les surfaces de Riemann ayant aux points α_i une ramification donnée, il faudra chercher à établir pour les S_i tous les systèmes satisfaisant aux conditions I et II, connaissant pour chaque substitution S_i le nombre et la nature des cycles qui la composent.

Les surfaces de Riemann que l'on rencontre dans la théorie des fonctions modulaires elliptiques sont de nature très particulière. Elles n'ont que trois points de ramification $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ($\alpha_1 = \infty$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$ par exemple), au point α_1 les n feuillets de la surface forment des cycles d'ordres quelconques: pour le point α_2 les cycles sont du second ordre, et il peut y avoir des feuillets isolés; enfin, pour le point α_3 , les cycles sont du troisième ordre, et il peut y avoir des feuillets isolés.

Bien que la ramification de ces surfaces soit déjà très particulière, il ne se présente pas moins pour une valeur un peu grande de n un nombre considérable de cas possibles, et l'on ne peut songer à examiner ici la question dans toute sa généralité.

Un cas particulièrement abordable est le suivant: le nombre q des feuillets est premier, et au point α_1 la ramification est telle que les q feuillets forment un cycle unique d'ordre q . Dans ce cas on fera correspondre aux points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les substitutions s, t, u , s étant de période q , t ne contenant que des transpositions, c'est-à-dire étant de période 2, et u seulement des cycles du troisième ordre, de sorte que u sera de période 3; et on cherchera tous les systèmes de trois substitutions s, t, u satisfaisant seulement à la condition II (page 60). La condition I est satisfaite identiquement car on peut toujours passer du feuillet i au feuillet k en faisant un nombre convenable de tours autour du point α_1 , puisqu'en α_1 les feuillets q forment un cycle unique.

§ 20. — *Application au cas des surfaces à onze feuillets* F_{11} .

Le cas qui nous intéresse est encore plus particularisé ; en effet, il s'agira dans ce cas (voir page 2) de surfaces à 11 feuillets ; au point $a_1 (a_1 = \infty)$ les onze feuillets forment un cycle unique ; au point $a_2 (a_2 = 1)$, les feuillets forment quatre cycles du second ordre, et les trois autres feuillets sont isolés ; par suite la substitution t contient quatre transpositions et deux éléments fixes, u trois cycles du troisième ordre et deux éléments fixes ; quant à la substitution t , si nous désignons par les numéros 1, 2, 3, 4, ..., 11 les différents feuillets que l'on rencontre en tournant autour du point a_1 dans le sens positif ordinaire, elle se réduira à la substitution circulaire de période 11

$$s = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11).$$

Nous obtiendrons maintenant toutes les surfaces qui nous intéressent en adoptant pour s cette détermination et en cherchant tous les systèmes t, u , tels que

$$(1) \quad stu = 1,$$

qui s'écrit aussi

$$(2) \quad tus = 1, \quad \text{ou} \quad (3) \quad ust = 1.$$

Par le choix définitif, fait à priori de la substitution s , nous n'avons pas à nous préoccuper de la question des systèmes de substitutions semblables donnant lieu à la même surface de Riemann, car de pareils systèmes ne se présenteront pas ici. D'autre part, nous obtiendrons toutes les surfaces de Riemann répondant à la question, car rien ne nous empêche de choisir le numérotage de nos feuillets de telle façon que s soit la substitution circulaire ci-dessus.

Je désignerai, pour abrégé, par *permanence* d'une substitution

des n premiers nombres un cycle du premier ordre ; par exemple si u remplace l'élément i par i , i sera une permanence de u . Quelques considérations très simples permettent alors de résoudre la question.

Supposons que la substitution t remplace le nombre g par le nombre h et u le nombre h par le nombre x ; alors la substitution tus remplacera g par $x + 1$; et comme tus est la substitution identique, on aura :

$$x + 1 \equiv g \pmod{11}, \quad \text{d'où} \quad x \equiv g - 1 \pmod{11}.$$

Donc u remplace le nombre h par $g - 1$ (réduit suivant le module 11).

Soit, d'autre part, x' le nombre remplacé par h par l'effet de t ; si u remplace h par k , x' sera remplacé par $k + 1$ par l'effet de tus qui est la substitution identique ; on a donc

$$x \equiv k + 1 \pmod{11}.$$

Ceci posé, la présence dans t d'une transposition $(i, i + 1)$ entraîne la présence dans u d'une permanence. En effet, $i + 1$ étant remplacé par i par l'effet de t , i par l'effet de u sera remplacé par $x \equiv (i + 1) - 1$, c'est-à-dire par i . Réciproquement à toute permanence de u correspond dans t une transposition de la forme ci-dessus. En effet, soit i le nombre invariable par u ; x étant l'élément remplacé par i par l'effet de t , on aura $x \equiv i + 1 \pmod{11}$; $i + 1$ est donc remplacé par i par l'effet de t et comme t ne contient que des transpositions ou des permanences on a dans t la transposition $(i, i + 1)$.

De ce qui précède résulte que t contient toujours deux transpositions de la forme $(i, i + 1)$, et qu'elle n'en contient pas plus ; car u ne peut avoir que deux permanences.

D'ailleurs les deux permanences de u ne peuvent être deux nombres consécutifs ; car si i et $i + 1$, étaient permanences de u , t devrait remplacer $i + 1$ à la fois par i et $i + 2$, ce qui est absurde.

D'autre part, on peut toujours supposer que l'une des perma-

nences de u est représentée par le nombre 1, car rien n'empêche de prendre pour premier feuillet tel feuillet qu'il nous plaira, en particulier un feuillet non ramifié au point a_3 . D'après ce qui précède la deuxième permanence de u ne pourra avoir lieu que pour les nombres 3, 4, 5, 6 ; les nombres 2 et 11 ne peuvent être acceptés ; quant aux nombres 7, 8, 9, 10 ils donneront évidemment lieu aux mêmes configurations que 6, 5, 4, 3, avec cette différence que le rôle des deux permanences sera permuté.

Nous aurons donc quatre cas à examiner ; avant de les passer en revue, nous établissons quelques résultats qui abrègent considérablement la discussion.

α). Les deux transpositions $(i, i + 3) (i + 1, i + 2)$ ne peuvent exister simultanément dans t ; car il en résulterait dans u la présence de la transposition $(i, i + 2)$, ce qui est inadmissible puisque u ne contient que des cycles du troisième ordre.

β). Trois permanences successives dans t ne peuvent se présenter, car elles entraîneraient dans u la présence d'un cycle d'ordre supérieur à 3.

γ). Une permanence de t ne peut se présenter encadrée entre les éléments de deux transpositions de la forme $(i, i + 1)$, c'est-à-dire qu'on ne peut avoir :

$$t = \left(\dots, i + 1, \quad i, \quad i + 2, i + 4, i + 3, \dots \right) \\ \left(\dots, \quad i, \quad i + 1, i + 2, i + 3, i + 4, \dots \right).$$

Car cette forme entraînerait dans u la présence d'un cycle d'ordre supérieur à 3.

δ). Dans t on ne peut rencontrer une permanence encadrée entre les éléments d'une transposition ; il en résulterait dans u la présence d'un cycle d'ordre > 3 .

ϵ). La présence dans t des deux permanences successives $i, i + 1$ entraîne dans u la présence du cycle $(i + 1, i, i - 1)$.

Passons en revue les différents cas.

PREMIER CAS. — Les permanences de u sont 1 et 3 ; on en conclut dans t la présence des transpositions (1, 2) (3, 4). D'autre part on voit aussitôt que u remplace 2 par 11, et 4 par 2. On peut alors écrire pour toutes les solutions qui répondent à ce cas :

$$t = \begin{pmatrix} 2, 1, 4, 3, & . & . & . & . & . & . & . \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1, 11, 3, 2, & . & . & . & . & . & . & . \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, dans u les éléments (4,2,11) doivent évidemment former un cycle. Donc u remplace 11 par 4 ; et par suite t remplace 5 par 11, ce qui entraîne dans t la présence de la transposition (5,11) et dans u le remplacement de 5 par 10. On peut donc écrire pour toutes les solutions de ce cas

$$u = \begin{pmatrix} 1, 11, 3, 2, 10, & . & . & . & . & . & . & 4 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 2, 1, 4, 3, 11, & . & . & . & . & . & . & 5 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix}.$$

Il reste à fixer la correspondance de cinq éléments dans chaque substitution. Dans t , on peut associer 6 soit avec lui-même, soit avec l'élément 9. On ne peut l'associer avec 7, car les trois permanences de t seraient 8,9,10, consécutives contrairement à β ; ni avec 8 car la permanence 7 serait encadrée par les éléments de la transposition (6,8), contrairement à δ ; ni avec 10, car on aurait dans t les trois permanences successives 7,8,9 contrairement à β).

En associant 6 à lui-même, on obtient sans difficulté la solution :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} t = \begin{pmatrix} 2, 1, 4, 3, 11, 6, 10, 8, 9, & 7, & 5 \\ 1, 2, 3, 4, & 5, 6, & 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix} = (1, 2)(3, 4)(5, 11)(7, 10), 6, 8, 9, \\ u = \begin{pmatrix} 1, 11, 3, 2, 10, 5, 9, 7, 8, & 6, & 4 \\ 1, & 2, 3, 4, & 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix} = (2, 11, 4)(5, 10, 6)(7, 9, 8) 1, 3, \end{array} \right.$$

que l'on établit immédiatement en remarquant que, par le choix qui a été fait, t est entièrement déterminé, et par suite u ; l'adop-

tion de la transposition (6,9) dans t détermine aussi entièrement t et par suite u et donne lieu à la deuxième solution :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \begin{pmatrix} 2, 1, 4, 3, 11, 9, 7, 8, 6, 10, 5 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix} = (1, 2)(3, 4)(5, 11)7, 8, 10, \\ u = \begin{pmatrix} 1, 11, 3, 2, 10, 8, 6, 7, 5, 9, 4 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix} = (2, 11, 4)(5, 10, 9)(6, 8, 7), 1, 3. \end{array} \right.$$

DEUXIÈME CAS. — Les permanences de u sont 1,4. On en conclut aussitôt que toutes les solutions de ce cas auront en commun la partie suivante :

$$t = \begin{pmatrix} 2, 1, \dots, 5, 4, \dots, \dots, \dots \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1, 11, \dots, 4, 3, \dots, \dots, \dots \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix}.$$

Considérons dans t l'élément 3; il ne peut être associé à lui-même d'après γ), ni à 6 ou 11 d'après α); j'associe donc 3 à 7 dans t ; j'en conclus, sans difficulté, l'existence de la solution suivante :

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \begin{pmatrix} 2, 1, 7, 5, 4, 6, 3, 11, 9, 10, 8 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix} = (1, 2)(3, 7)(4, 5)(8, 11), 6, 9, 10, \\ u = \begin{pmatrix} 1, 11, 6, 4, 3, 5, 2, 10, 8, 9, 7 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix} = (2, 11, 7)(3, 6, 5)(8, 10, 9), 1, 4. \end{array} \right.$$

Il en résulte aussitôt que l'association de 3 à 10 donnera aussi une solution, car l'arrangement des feuillets correspondants sera inverse de celui obtenu ci-dessus, comme on le voit aussitôt en supposant les onze éléments 1, 2, 3, 4, ..., 11 rangés sur un cercle que l'on parcourt successivement dans le sens positif de la rotation et dans le sens négatif. Cette solution est :

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \begin{pmatrix} 2, 1, 10, 5, 4, 9, 7, 8, 6, 3, 11 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix} = (1, 2)(3, 10)(4, 5)(6, 9), 7, 8, 11, \\ u = \begin{pmatrix} 1, 11, 9, 4, 3, 8, 6, 7, 5, 2, 10 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix} = (2, 11, 10)(3, 9, 5)(6, 8, 7), 1, 4. \end{array} \right.$$

Associations 3 à 8 ; u devrait alors remplacer à la fois les deux nombres 6 et 7 par 5, ce qui est absurde. L'association de 3 à 9, qui donne l'arrangement symétrique du précédent, ne fournit aussi aucune solution nouvelle.

TROISIÈME CAS. — Les permanences de u sont 1 et 5. La partie commune à toutes les solutions de ce cas est :

$$t = \begin{pmatrix} 2, 1, \dots, 6, 5, \dots, \dots \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1, 11, \dots, 5, 4, \dots, \dots \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix}.$$

Les éléments 3,4 ne peuvent être à la fois permanence dans t ; car, d'après ϵ), il y aurait dans ce cas dans u le cycle (4,3,2), ce qui est impossible, car u contient déjà le cycle (2,11, x) qui ne peut se confondre avec (4,3,2). D'autre part, on ne peut dans t associer 3 à 4, car on aurait dans u trois permanences, ni 3 à 11 d'après α).

Associations 3 à 7. Nous en concluons aussitôt l'existence de la solution

$$(V) \begin{cases} t = (1, 2)(3, 7)(5, 6)(8, 11), 4, 9, 10, \\ u = (2, 11, 7)(3, 6, 4)(8, 10, 9), 1, 5, \end{cases}$$

à l'aide des procédés élémentaires exposés plus haut.

Renversons les rôles de 3 et 4 dans ces substitutions, ce qui revient à adopter un arrangement des feuillets inverse de celui obtenu en dernier lieu. Nous aurons encore une solution ; l'opération revient à associer 3 à lui-même et 4 à 11. La solution existe en effet et est :

$$(VI) \begin{cases} t = (1, 2)(4, 11)(5, 6)(7, 10), 3, 8, 9, \\ u = (2, 11, 3)(4, 10, 6)(7, 6, 8), 1, 5. \end{cases}$$

Associations 3 à 8. L'application des procédés ci-dessus à la détermination de t et u amène dans u l'apparition de la transposition (9,10) ce qui est impossible ; l'association de 3 à 9 donne lieu dans t à l'apparition de la transposition (10,11) qui ne peut y exister puisqu'il n'y a que deux permanences dans u .

Enfin, l'association de 3 à 10 donne la solution, facile à caractériser complètement :

$$(VII) \begin{cases} t = (1, 2)(3, 10)(4, 8)(5, 6), 7, 9, 11, \\ u = (2, 11, 10)(3, 9, 8)(4, 7, 6), 1, 5. \end{cases}$$

QUATRIÈME CAS. — Les permanences de u sont 1 et 6. Les solutions qui rentrent dans ce cas ont la partie commune

$$t = (2, 1, \dots, 7, 6, \dots), \quad u = (1, 11, \dots, 6, 5, \dots).$$

Considérons l'élément 4 dans t ; on ne peut l'associer ni à 3 ni à 5, car u ne contient que deux permanences ; on peut l'associer à 8, 9, 10, 11 ou à lui-même. Mais il suffira d'examiner les cas où t contient les transpositions (4, 8) ou (4, 9) ou la permanence 4, car les cas où t contiendrait les transpositions (4, 11) ou (4, 10) donneraient des configurations inverses des précédentes.

L'association de 4 à 8 donne, après une courte discussion, la solution :

$$(VIII) \begin{cases} t = (1, 2)(3, 10)(4, 8)(6, 7), 5, 9, 11, \\ u = (2, 11, 10)(3, 9, 8)(4, 7, 5), 1, 6. \end{cases}$$

D'après cela, l'association de 4 à 11 donne une autre solution qui est en effet :

$$(IX) \begin{cases} t = (1, 2)(4, 11)(5, 9)(6, 8), 3, 8, 10, \\ u = (2, 11, 3)(4, 10, 9)(5, 8, 7), 1, 6. \end{cases}$$

L'introduction dans t de la transposition (4, 9) montre que l'on aura :

$$t = (2, 1, \dots, 9, \dots, 7, 6, \dots, 4, \dots), \quad u = (1, 11, \dots, 8, \dots, 6, 5, \dots, 3, \dots).$$

Un coup d'œil sur u montre que le cycle qui contient 2, 11, ne peut contenir que l'élément 10 pour troisième élément, ce qui

permet d'affirmer que u remplace 11 par 10 et 10 par 2, et que par suite t remplace 11 par lui-même et 3 par 10 ; 8 et 5 seraient alors les deux autres permanences de t ; ce qui est impossible car on en conclurait que u contient la transposition (3,9). L'association de 4 à 9 ou de 4 à 10 ne donne donc pas de solution.

Supposons enfin 4 permanence de t . On obtient ainsi :

$$t = \begin{pmatrix} 2, 1, & , 4, ., 7, 6, . & . & . & . \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1, 11, ., 3, ., 6, 5, . & . & . & . \\ 1, & 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \end{pmatrix}.$$

Mais dans u on ne peut évidemment compléter le cycle qui contient 2,11 que par l'adjonction de 8, 9 ou 10.

En complétant le cycle par 8 ou 9 et en achevant comme d'habitude la détermination de t et u , on introduit dans u une transposition, ou une permanence, ce qui est inadmissible.

Enfin, en complétant le cycle par 10, on obtient une solution

$$(X) \begin{cases} t = (1, 2)(3, 10)(5, 9)(6, 7), 4, 8, 11, \\ u = (2, 11, 10)(3, 9, 4)(5, 8, 7), 1, 6. \end{cases}$$

La discussion précédente nous montre donc qu'il y a dix surfaces de Riemann ayant la ramification donnée.

Nous résumons sous forme de tableau le résultat de la discussion. Pour plus de commodité dans la suite, nous écrivons un peu différemment les dix solutions obtenues en opérant dans chaque cas une permutation circulaire des onze nombres 1 à 11, ce qui revient à transformer les substitutions s, t, u par une certaine puissance (différente dans chaque cas) de la substitution s . Nous écrivons en outre les solutions dans un ordre un peu différent de celui dans lequel on les a obtenues. Nous obtenons ainsi le tableau suivant où nous avons indiqué en chiffres romains, le numéro de la solution correspondante ci-dessus :

Substitution commune à toutes les solutions.

$$s = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11).$$

f_4 :	IV.	$t = (1, 8)(2, 3)(4, 7)(10, 11), 5, 6, 9.$	$u = (11, 9, 8)(1, 7, 3)(4, 6, 5), 2, 10.$
f'_4 :	III.	$t = (1, 2)(4, 11)(5, 8)(9, 10), 3, 6, 7.$	$u = (10, 8, 4)(11, 3, 2)(5, 7, 6), 9, 1.$
f_2 :	V.	$t = (1, 2)(3, 10)(4, 7)(8, 9), 5, 6, 11.$	$u = (9, 7, 3)(10, 2, 11)(4, 6, 5), 1, 8.$
f'_2 :	VI.	$t = (2, 9)(3, 4)(5, 8)(10, 11), 1, 6, 7.$	$u = (1, 11, 9)(2, 8, 4)(5, 7, 6), 3, 10.$
f_3 :	I.	$t = (1, 7)(3, 6)(8, 9)(10, 11), 2, 4, 5.$	$u = (1, 6, 2)(3, 5, 4)(9, 7, 11), 8, 10.$
f'_3 :	II.	$t = (1, 2)(3, 4)(5, 11)(6, 9), 7, 8, 10.$	$u = (2, 11, 4)(5, 10, 9)(6, 8, 7), 1, 3.$
f_4 :	VII.	$t = (1, 5)(2, 3)(7, 11)(9, 10), 4, 6, 8.$	$u = (10, 8, 7)(11, 6, 5)(1, 4, 3), 2, 9.$
f_5 :	VIII.	$t = (3, 4)(1, 5)(8, 9)(7, 11), 6, 10, 2.$	$u = (4, 2, 1)(6, 5, 11)(9, 7, 10), 3, 8.$
f_6 :	IX.	$t = (1, 5)(3, 4)(7, 11)(9, 10), 2, 6, 8.$	$u = (10, 8, 7)(11, 6, 5)(1, 4, 2), 9, 3.$
f'_6 :	X.	$t = (1, 5)(2, 3)(7, 11)(8, 9), 4, 6, 10.$	$u = (1, 4, 3)(9, 7, 10)(5, 11, 6), 8, 2.$

Le tableau ci-dessus nous indique nettement la ramification des dix surfaces que nous avons désignées par les lettres $f_1, f'_1, \dots, f_6, f'_6$; il nous sera utile dans la suite, quand nous ferons l'étude fonctionnelle des sous-groupes correspondants Γ_{11} du groupe modulaire.

§ 21. — Détermination directe des surfaces de Riemann $F_{11}^{(i)}$.

Nous nous proposons maintenant d'établir, par un procédé entièrement élémentaire, les résultats que nous avons obtenus à l'aide des idées de M. Hurwitz; et en particulier, de caractériser d'une autre façon les dix surfaces de Riemann dont il a été question dans les paragraphes précédents, par leur représentation conforme sur un plan (ce qui est possible, puisque ces surfaces sont du genre 0).

A chacune des surfaces de Riemann, ayant la ramification donnée (savoir au point $J = i\infty$, onze feuillets unis cycliquement, au point $J = 0$ deux feuillets isolés et 9 feuillets unis trois par trois en trois systèmes cycliques et enfin, au point $J = 1$, trois feuillets isolés, les huit autres étant groupés deux par deux, en quatre systèmes cycliques) le théorème de la ramification fait correspondre un système de sous-groupes du groupe modulaire. Le polygone

fondamental de l'un de ces sous-groupes correspond point par point à la surface de Riemann. Si, en particulier, nous faisons correspondre le point $J = \infty$, au point $\omega = i\infty$ de l' ω demi plan positif, les onze feuillets de la surface seront représentés par onze triangles doubles de la division modulaire placés symétriquement par rapport à l'axe imaginaire des ω et qui porteront les noms $1, S^{\pm 1}, S^{\pm 2}, \dots, S^{\pm 5}$. Quelle que soit celle des surfaces de Riemann ayant la ramification donnée que l'on considère, on sera toujours conduit à un polygone fondamental composé des mêmes onze doubles triangles. Ce qui distinguera les différentes surfaces répondant à la question, ce sera la correspondance établie entre les arêtes du polygone fondamental. A chacune des correspondances possibles, c'est-à-dire donnant lieu à une surface fermée φ_{11} du genre 0 qui présentera trois points a entourés de deux triangles élémentaires seulement (points d'exception a) et deux points b entourés de deux triangles élémentaires (points d'exception b), correspondra un système de groupes semblables et une surface de Riemann et inversement. Pour compter les surfaces de Riemann cherchées et, par suite, les systèmes de sous-groupes correspondants, nous allons donc déterminer le nombre des correspondances distinctes que l'on peut établir entre les arcs qui limitent inférieurement le polygone F_{11} et qui sont au nombre de onze. Les arêtes verticales du polygone F_{11} se correspondent évidemment l'une à l'autre par la substitution $S^{11} = \omega + 11$ (fig. 5).

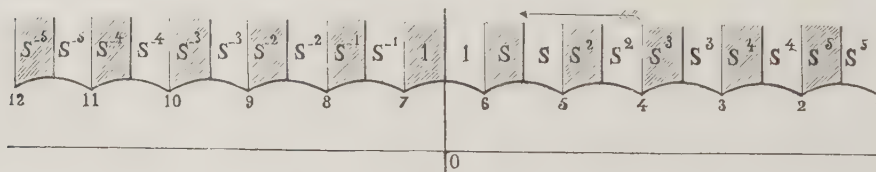


Fig. 5.

Nous nous servirons constamment, dans ce qui va suivre, de cette remarque que la surface $F_{11}^{(j)}$ étant du genre 0, le polygone fondamental $F_{11}^{(\omega)}$ pourra, par une déformation continue ne comportant ni déchirure, ni duplication et après juxtaposition des arêtes

conjuguées, être transformée en une figure recouvrant un plan entièrement sans lacune et une seule fois.

Ceci posé, la surface φ_{11} présentant trois points d'exception a , trois des arêtes inférieures de $F_{11}^{(w)}$ seront conjuguées à elles-mêmes; de même, puisqu'il y a deux points d'exception b , il y aura deux couples de deux arêtes inférieures adjacentes, et dans chaque couple l'une des arêtes sera conjugquée à l'autre. Ceci nous donne déjà la correspondance de sept des arêtes inférieures de $F_{11}^{(w)}$; il reste quatre arêtes inférieures libres qui serviront à relier entre eux les arcs portant les différents points d'exception. Mais nous ne savons rien sur les positions relatives des arcs donnant les points d'exception dans la chaîne fermée formée par les onze arêtes inférieures.

Quelques considérations très simples vont nous permettre de déterminer tous les cas possibles.

Nous dirons que deux points d'exception a sont *consécutifs* lorsque les arcs dont ils proviennent sont adjacents dans la série fermée formée par les arêtes inférieures; deux points d'exception b sont *consécutifs* si les quatre arcs qui les fournissent sont consécutifs sur la chaîne; enfin, un point a et un point b d'exception sont *consécutifs* si l'arc générateur du point a est adjacent à l'un des deux arcs consécutifs qui, par juxtaposition, donnent naissance au point b .

1°) Il ne peut y avoir trois points a consécutifs dans la correspondance cherchée, c'est-à-dire que la figure 6 ne peut être

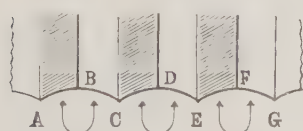


Fig. 6.

acceptée (1); en effet, si l'on déformait le polygone $F_{11}^{(w)}$ dont la correspondance présenterait cette particularité, le point du plan φ_{11} ainsi obtenu et qui proviendrait de la réunion des points A, C, E, G serait

entouré de huit triangles élémentaires au moins, ce qui est impossible, puisque sur φ_{11} il n'y a qu'un point c entouré de vingt-deux triangles élémentaires

(1) Dans ce qui suit on indique sur les figures par une flèche la correspondance établie entre les arêtes inférieures.

2°) Si deux points a sont consécutifs, les arcs qui sont adjacents extérieurement aux arcs porteurs des points a sont

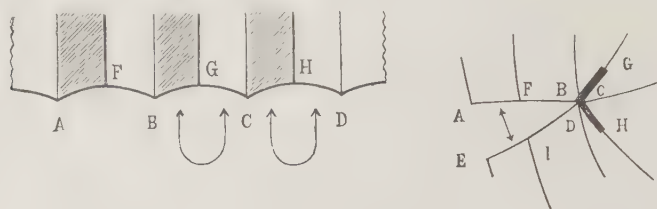


Fig. 7 et 7 bis.

conjugués. Il suffit de considérer la première des figures 7 (1) et de la replier suivant la figure 7 bis pour se rendre compte que la seule correspondance des côtés AB, DE donne au point naissant de B, C, D un point b ordinaire, c'est-à-dire entouré de six triangles élémentaires. La présence de deux points a consécutifs fixe donc la correspondance de quatre arêtes de $F_{11}^{(\omega)}$.

On verra de même que :

3°) La présence de deux points b d'exception consécutifs exige la correspondance des deux arcs bordant l'ensemble des quatre arêtes génératrices des deux points b et par conséquent fixe la correspondance de six des onze arêtes inférieures de $F_{11}^{(\omega)}$.

4°) La présence d'un point a et d'un point b consécutifs exige également la correspondance des deux arcs bordant extérieurement l'ensemble des trois arcs générateurs et fixe la correspondance de cinq des arêtes.

On voit immédiatement qu'un point d'exception a , isolé, avec

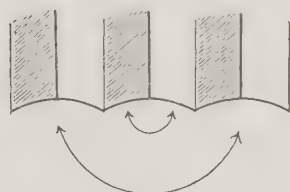


Fig. 8.

correspondance des arêtes adjacentes à l'arc générateur (fig. 8) ne peut se présenter dans la série. De même pour un point d'exception b dont les arcs générateurs sont encadrés par deux arêtes conjuguées entre elles.

(1) Dans la figure 7 bis on a tracé en gros traits les lignes qui résultent de la juxtaposition de deux arêtes inférieures de $F_{11}^{(\omega)}$.

Soient, maintenant, deux arêtes ne portant aucun point d'exception conjuguées entre elles, la correspondance des arêtes qui les séparent étant quelconque. Soient CD , AB , ces deux arêtes (fig. 9). On ne peut conjuguer DF , PA , car dans le repliement de la figure



Fig. 9.

le sommet de φ_{11} provenant de la juxtaposition de A et D serait entouré de quatre triangles seulement, ce qui ne peut avoir lieu pour un point b .

Supposons que l'arête DF porte un point d'exception a . Si on replie la figure, on voit que la correspondance de FH et PA est une conséquence de ce fait qu'un point b ordinaire de φ_{11} est entouré nécessairement de six triangles élémentaires.

Si on suppose que les arêtes DF , FG portent un point d'exception b , on voit de même que HL et PA sont conjugués.

On pourrait conjuguer DF à une arête autre que PA . Les résultats obtenus ne seraient pas différents; car en fait, PA joue dans ce qui précède le rôle que l'on voudrait faire jouer à DF . En un mot, on peut dire que :

5°) *La présence de deux arêtes conjuguées ne portant pas de point d'exception, entraîne celle d'un point d'exception a ou b isolé et de deux autres arêtes conjuguées sans points d'exception.*

Nous passons maintenant à la discussion détaillée. Les trois points d'exception a pourront se grouper de différentes manières :

- I. Deux points a seront consécutifs, le troisième sera consécutif à un point d'exception b ;
- II. Deux points a sont consécutifs, le troisième point a est isolé ;
- III. Deux des points a sont chacun consécutifs à l'un des deux points b ; le troisième point a est isolé ;

IV. Un seul point a est consécutif à un point b , les deux autres sont isolés ;

V. Les trois points a sont isolés.

(Il s'agit, bien entendu, dans ces énoncés de points a , b , d'exception).

Examinons ces cinq hypothèses :

I. — Deux points a sont consécutifs, le troisième point a est consécutif à un point b . La présence de deux points a consécutifs fixe la correspondance de quatre arêtes (2° page 74) ; celle d'un point a consécutif à un point b de cinq arêtes (4° page 74) ; la correspondance de neuf des arêtes est donc entièrement fixée ; les deux arêtes non employées donneront lieu au deuxième point d'exception b et seront conjuguées l'une à l'autre.

Il est évident que si nous ne considérons pas comme distincts les groupes semblables à l'un des groupes correspondant à l'une des $F_{44}^{(g)}$ cherchées, nous pouvons assigner dans la chaîne des arêtes inférieures du polygone fondamental F à l'ensemble formé par le point a et par le point b associés, une position déterminée ; et que nous obtiendrons tous les groupes possibles en disposant les autres éléments de toutes les manières possibles.

D'après cela nous plaçons le point a associé au point b sur l'arc qui contient le point équivalent à i , $1 + i$. Le point a ainsi fixé, le point b associé peut être à sa droite ou à sa gauche.

Correspondance en traits pleins : groupe γ_1 , en traits pointillés, groupe γ_2 .

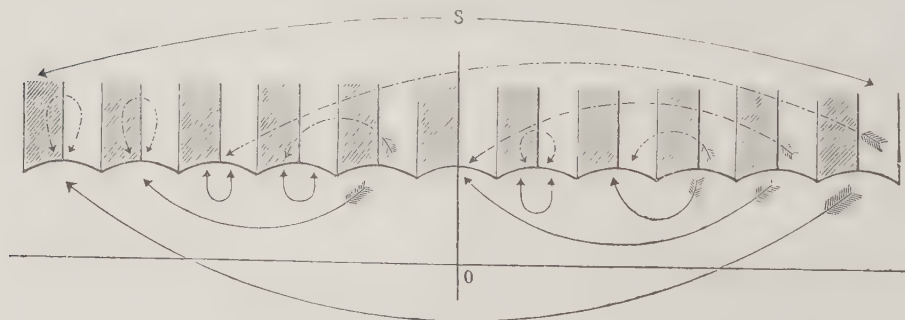


Fig. 10.

Si le point d'exception b est à droite de a , il n'y a que deux dispositions possibles. Le 2^{ième} point d'exception b est engendré par les arcs placés aux extrémités de la chaîne sur la figure, ce qui donne lieu à la correspondance de la figure 10, marquée par des flèches tracées en traits pleins ; ou bien le 2^{ième} point d'exception est engendré par deux arcs adjacents, dont l'un est celui qui limite inférieurement le triangle fondamental, ce qui donne lieu à la correspondance marquée en traits pointillés dans la figure 10.

Pour le cas où le point d'exception b est à gauche du point a , des considérations analogues conduisent aux deux correspondances marquées l'une en traits pleins, l'autre en traits pointillés sur la figure 11.

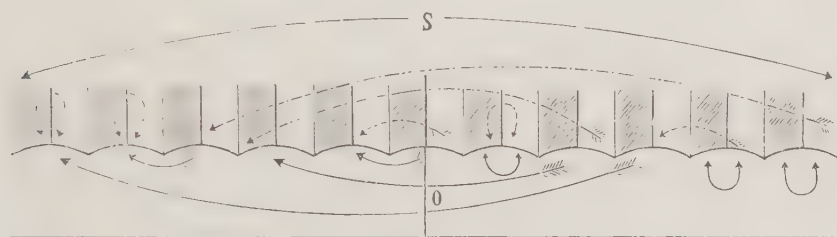


Fig. 11.

Nous avons ainsi obtenu quatre polygones qui sont susceptibles de répondre à la question. Il est facile de vérifier en déformant les quatre polygones obtenus de façon à amener la coïncidence des arêtes conjuguées que les quatre polygones satisfont aux conditions du théorème de la ramification. A ces quatre polygones correspondent quatre surfaces de Riemann ayant la ramification donnée. Il est à remarquer que les polygones à correspondances tracées en traits pleins sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire, à une déformation permise près, il en est de même des polygones à correspondance en traits pointillés tracées sur les deux figures. Aux quatre polygones correspondent quatre surfaces de Riemann, ayant la ramification donnée et symétriques deux à deux par rapport à l'axe réel.

II. — Deux points a sont consécutifs, le troisième point a est isolé.

L'ensemble formé par les deux points a consécutifs fixe la correspondance de quatre arêtes; à cet ensemble sera adjacent un point a ou un point isolé b . Si c'est un point a la correspondance de trois nouvelles arêtes est fixée d'après 5); et les sept arêtes dont la correspondance est fixée forment une série continue; il restera dans ce cas quatre arêtes successives s'associant deux à deux pour donner les deux points d'exception b qui seront consécutifs.

Si c'est un point b qui est adjacent à l'ensemble, la présence de ce point b provoque d'après 5), la correspondance de quatre nouvelles arêtes formant un ensemble continu de huit arêtes avec les quatre déjà employées. Il restera trois arêtes adjacentes non employées, dont deux porteront un point d'exception b , la troisième un point d'exception a . Il y aura donc nécessairement un point a consécutif à un point b .

L'hypothèse d'un point b adjacent à l'ensemble, rentre donc dans le cas I. Le seul cas possible comporte la présence d'un point a isolé, de deux points a consécutifs, et de deux points b consécutifs.

En prenant pour arc porteur du point a isolé l'arête limitant inférieurement le double triangle 1, l'ensemble formé par les deux points a consécutifs peut être à la gauche, ou à la droite du point a isolé. De là les deux correspondances, évidemment symétriques par

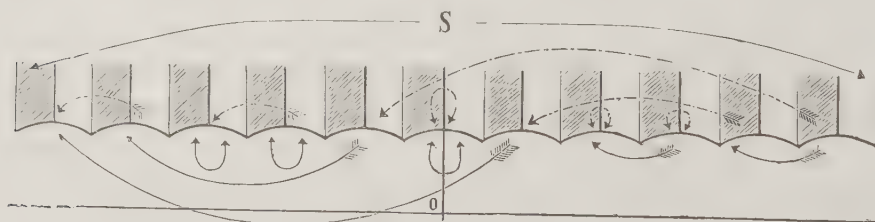


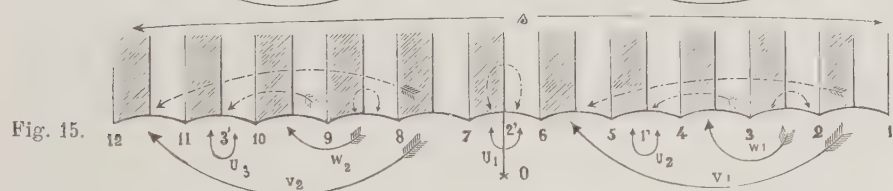
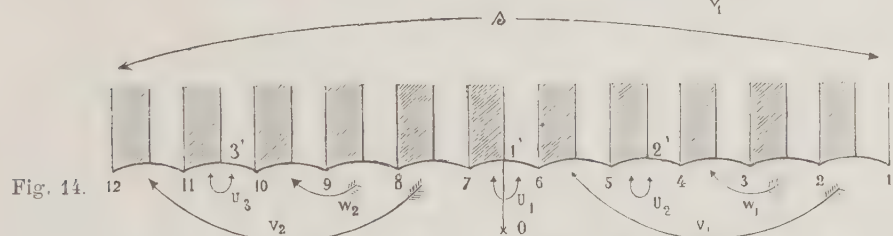
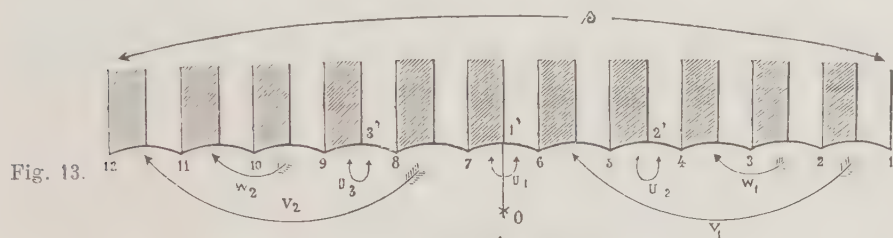
Fig. 12.

rapport à l'axe imaginaire, marquées sur la figure 12 en traits pleins et en traits pointillés. Si l'on replie ces polygones en tenant compte de la correspondance des arêtes on trouve que les surfaces

planes φ_{41} qui prennent naissance satisfont aux conditions du théorème de la ramification. Il correspond donc à ces deux polygones deux surfaces de Riemann symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe réel.

III. — Deux points a consécutifs chacun à un point b , le troisième point a isolé.

Chacun des ensembles formés par un point a associé à un point b fixe la correspondance de cinq arêtes ; la correspondance de dix des onze arêtes est donc fixée ; la onzième arête porte le point a isolé. En plaçant le troisième point a sur l'axe imaginaire du plan des ω , on voit que la disposition relative des trois morceaux dont se compose la chaîne des arêtes inférieures est indifférente. D'autre part dans chacun des deux ensembles formés par l'association d'un



point a et d'un point b il y a deux positions relatives possibles pour le point a et le point b . Il y a alors quatre correspondances possibles, deux symétriques l'une de l'autre et distinguées par des

traits pleins ou pointillés dans la figure 15, les deux autres représentées par les figures 13 et 14.

Les quatre polygones $F_{11}^{(\omega)}$ donnent lieu, lorsqu'on les replie à quatre figures planes φ_{11} , satisfaisant aux conditions du théorème de la ramification ; à ces quatre figures correspondent quatre surfaces de Riemann.

Les deux surfaces correspondant à la figure 15 sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe réel ; celles qui correspondent aux figures 13 et 14 sont symétriques d'elles-mêmes.

IV. — Un point a consécutif à un point b , les deux autres points a isolés. La correspondance qu'exige l'ensemble du point a et du point b embrasse cinq arêtes. A cet ensemble peut être contigu un point a ou un point b isolé. Supposons le premier cas ; trois nouvelles arêtes formant avec les cinq premières un ensemble continu ont leur correspondance fixée. Les trois autres arêtes non employées qui sont consécutives portent un point a et un point b qui sont dès lors consécutifs. On retombe sur le cas III. Supposons que ce soit un point b qui soit contigu à l'ensemble. Alors neuf arêtes consécutives ont leur correspondance fixée. Les deux arêtes qui restent portent deux points a consécutifs, et l'on est ramené au cas I. Le cas IV ne donne donc rien de nouveau.

V. — Trois points a isolés. Deux hypothèses se présentent : ou bien les deux points b sont consécutifs, ou bien ils ne le sont pas. Examinons ces deux hypothèses.

Les deux points b étant contigus, la correspondance de six des arêtes est fixée. A l'ensemble (b, b) est adjacent un point isolé a , ce qui porte nécessairement à neuf le nombre des arêtes successives dont la correspondance est fixée. Les deux arêtes qui restent portent deux points a consécutifs. On retombe donc sur un cas déjà traité.

Les deux points b étant supposés isolés, ainsi que les trois points a , on aurait cinq ensembles d'arêtes embrassant en tout sept arcs qui devraient être séparés les uns des autres par cinq arêtes ne portant aucun point d'exception, ce qui porterait à douze au moins

le nombre des arêtes inférieures. L'hypothèse faite est donc inadmissible.

Donc le cas V ne donne rien de nouveau.

De toute cette discussion résulte qu'il y a dix systèmes de sous-groupes semblables Γ_{11} du groupe modulaire donnant lieu à dix surfaces de Riemann ayant la ramification donnée.

Dans chacun des dix systèmes de sous-groupes, un sous-groupe particulier est défini par les polygones fondamentaux représentés dans les figures 10 à 15.

Nous remarquons tout de suite que, pour l'étude fonctionnelle des groupes, nous pourrions remplacer l'un quelconque de ces groupes ou son polygone fondamental, par l'un des onze groupes semblables ou par le polygone fondamental de l'un des onze sous-groupes semblables.

Le résultat obtenu concorde avec celui donné par la théorie de M. Hurwitz ; mais il donne, en outre, par pliage des polygones fondamentaux obtenus ci-dessus, une image très nette de la ramifi-

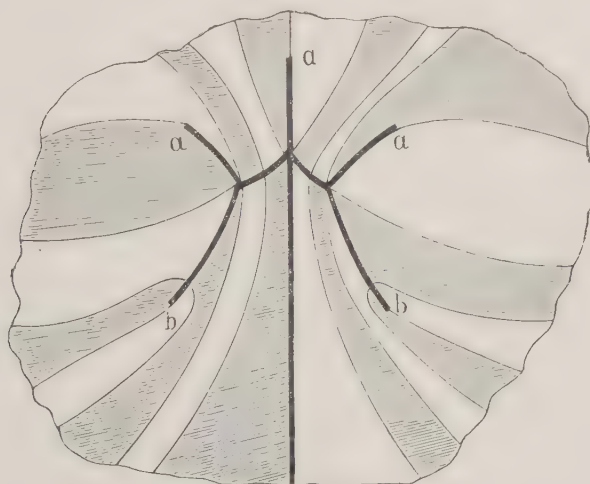


Fig. 16.

cation des dix surfaces. Nous donnons dans la figure 16 la surface plane φ_{μ} qui résulte du pliage du polygone représenté dans la figure 13 par exemple ; les traits marqués en gros proviennent de

la juxtaposition d'arêtes conjuguées du polygone correspondant $F_4^{(\omega)}$. C'est sous cette forme que M. Klein, dans son mémoire : *Über die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen*, *Math. Annalen*, vol. XV (1879), page 533, a obtenu ou plutôt a énuméré les différentes solutions de la question proposée.

§ 22. — *Étude arithmétique des groupes Γ_{11} qui ont pour polygones fondamentaux les polygones obtenus dans le paragraphe 21.*

Pour distinguer entre eux les dix sous-groupes Γ_{11} qui répondent aux polygones qui viennent d'être déterminés, nous appelons γ_1, γ'_1 les groupes à polygones symétriques l'un de l'autre qui répondent à la correspondance en traits pleins des figures 10 et 11 ; γ_2 et γ'_2 ceux dont les polygones symétriques l'un de l'autre répondent à la correspondance pointillée des figures 10 et 11 ; γ_3, γ'_3 les groupes relatifs à la figure 12 ; γ_4 celui correspondant à la figure 13 et γ_5 à la figure 14 ; enfin γ_6 et γ'_6 les groupes à polygones symétriques dont la correspondance des arêtes est figurée en traits pleins ou en traits pointillés sur la figure 15.

Ceci posé, nous nous proposons d'étudier la nature arithmétique de ces groupes et des groupes semblables ; en particulier de voir si les substitutions de ce groupe peuvent être définies à l'aide de congruences suivant un module entier quelconque.

Nous remarquons qu'il suffit de faire cette étude pour les groupes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$, car les groupes $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \gamma'_6$ étant respectivement les groupes qu'on déduit de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_6$ par transformation à l'aide de l'opération $\omega' = -\omega_1(\omega_1 = x - iy, \text{ si } \omega = x + iy)$, leur nature arithmétique se déduit aussitôt de celle de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_6$.

Les groupes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ étant de classe onze, leur rang ⁽¹⁾ (*Stufe* de Klein) ne peut être que 11, car 11 étant

(1) Je traduis par « rang » le mot allemand *Stufe*. Pour tout ce qui est relatif aux propriétés arithmétiques des groupes du groupe modulaire, voir Klein-Fricke, *Vorlesungen*, 2^e partie, chap. VII, vol. I, et en particulier paragraphe 10 et suivants de ce chapitre.

premier n'admet pas de diviseurs autres que lui-même ou l'unité. Nous sommes donc amenés à réduire les substitutions de l'un de ces groupes suivant le module 11, et à voir si les substitutions ainsi réduites forment un groupe dans le groupe d'ordre fini G_{660} qui contient tous les types de substitutions modulaires réduites suivant le module 11. Si elles forment un groupe G_s dans ce groupe G_{660} , les caractères des substitutions de ce G_s indiquent les restrictions arithmétiques, exprimées par des congruences, que l'on doit imposer aux coefficients des substitutions du groupe Γ_{11} qui a été réduit. Si en outre au groupe G_s correspond, dans le groupe modulaire Γ , un sous-groupe Γ_{660} d'indice égal à 11, le groupe Γ_{11} qui, réduit module 11, donne lieu à G_s sera identique à Γ_{660} et par suite entièrement définissable par des congruences. Dans le cas où Γ_{660} est d'indice ≥ 11 , le groupe Γ_{11} considéré ne sera que partiellement définissable par des congruences. Enfin si G_s est le groupe G_{660} lui-même, le groupe Γ_{11} correspondant ne présentera aucun caractère arithmétique s'exprimant par des congruences. Pour reconnaître que nous nous trouvons dans ce dernier cas, il suffira de montrer qu'il existe dans le groupe G_s une substitution congrue module 11 avec $T \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et une opération congrue avec $S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, car le groupe G_{660} peut être engendré par ces deux substitutions.

Il est absolument indispensable de former les substitutions génératrices de nos groupes, et de les réduire (module 11) pour pouvoir indiquer ce qui se passe dans le cas actuel. Nous devrions réunir dans un tableau les substitutions génératrices des six groupes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_6$ exprimées en fonction des substitutions S et T , leurs expressions numériques, les types auxquels elles se réduisent lorsqu'on les prend module 11, enfin leurs périodes, si on les prend suivant le module 11. Au lieu de construire ce tableau pour les groupes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$, nous remplacerons quelques-uns d'entre eux (savoir $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) par des groupes semblables, de façon à rester, au moins pour le groupe γ_1 ,

en concordance avec les résultats obtenus par M. Klein pour les groupes Γ_{11} congruents, que l'on rencontre dans la théorie de la transformation du onzième ordre. Nous avons donc indiqué dans les tableaux qui vont suivre, outre les éléments énumérés plus haut, le numéro de la figure qui donne le polygone fondamental correspondant. Enfin nous devons indiquer comment on peut exprimer en fonction des substitutions S et T les substitutions génératrices de l'un des sous-groupes γ . Une telle substitution transforme, comme on sait, l'une des arêtes du polygone F_{11} en une autre ; pour obtenir son expression, il suffit d'exprimer qu'elle transforme le double triangle qui borde extérieurement l'une des deux arêtes associées dans le double triangle du polygone fondamental du groupe considéré qui borde intérieurement la deuxième arête du couple. Les tableaux, construits comme il vient d'être dit, sont les suivantes (1) :

GROUPE $\gamma_1^{(a)} = S^2 \gamma_1 S^{-2}$ (figure 17).

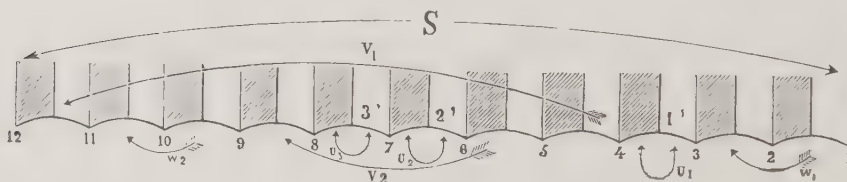


Fig. 17.

$$\begin{aligned}
 s = S^{11} &= \omega + 11 \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \\
 u_1 = S^3 T S^{-3} &= \frac{3\omega - 10}{\omega - 3} \equiv \begin{pmatrix} 3, & 1 \\ 1, & -3 \end{pmatrix} \text{ période 2 (mod. 11),} \\
 u_2 = T &= \frac{-1}{\omega} \equiv \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \text{ période 2 (mod. 11),} \\
 u_3 = S^{-1} T S &= \frac{\omega + 2}{-\omega - 1} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ -1, & -1 \end{pmatrix} \text{ période 2 (mod. 11),}
 \end{aligned}$$

(1) La signification géométrique des substitutions $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, v_1, v_2$ est indiquée sur la figure correspondante dans chaque cas.

$$w_4 = S^4 TS^{-5} = \frac{4\omega - 21}{\omega - 5} \equiv \begin{pmatrix} 4, & 1 \\ 1, & -5 \end{pmatrix} \text{ période 3 (mod. 11),}$$

$$w_2 = S^{-4} TS^3 = \frac{4\omega + 13}{-\omega - 3} \equiv \begin{pmatrix} 4, & 2 \\ -1, & 3 \end{pmatrix} \text{ période 3 (mod. 11),}$$

$$v_1 = S^{-5} TS^{-2} = \frac{5\omega - 9}{-\omega + 2} \equiv \begin{pmatrix} 5, & 2 \\ -1, & 2 \end{pmatrix} \text{ période 5 (mod. 11),}$$

$$v_2 = S^{-2} TS^{-1} = \frac{2\omega - 1}{-\omega + 1} \equiv \begin{pmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} \text{ période 5 (mod. 11).}$$

GRUPE $\gamma_2'' = S^4 \gamma_2 S^{-4}$ (figure 18).

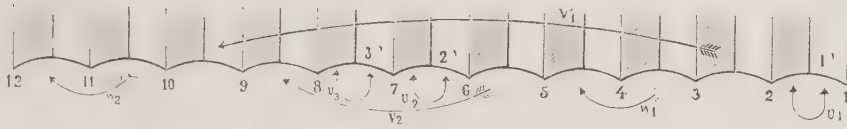


Fig. 18.

$$s = S^{11} = \omega + 11 \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = S^5 TS^{-5} = \frac{5\omega - 26}{\omega - 5} \equiv \begin{pmatrix} 5, & 4 \\ 1, & -5 \end{pmatrix} \text{ période 2, suivant module 11,}$$

$$u_2 = T = \frac{-1}{\omega} \equiv \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \text{ » 2 »}$$

$$u_3 = S^{-4} TS = \frac{\omega + 2}{-\omega - 1} \equiv \begin{pmatrix} 1, & +2 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} \text{ » 2 »}$$

$$w_4 = S^3 TS^{-3} = \frac{2\omega - 7}{\omega - 3} \equiv \begin{pmatrix} 2, & 4 \\ 1, & -3 \end{pmatrix} \text{ » 3 »}$$

$$w_2 = S^{-5} TS^4 = \frac{-5\omega - 21}{\omega + 4} \equiv \begin{pmatrix} -5, & 1 \\ 1, & 4 \end{pmatrix} \text{ » 3 »}$$

$$v_4 = S^{-3} TS^{-4} = \frac{-3\omega + 11}{\omega - 4} \equiv \begin{pmatrix} -3, & 0 \\ 1, & -4 \end{pmatrix} \text{ » 5 »}$$

$$v_2 = S^{-2} TS^{-1} = \frac{2\omega - 1}{-\omega + 1} \equiv \begin{pmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} \text{ » 5 »}$$

GROUPE $\gamma_3^{(a)} = S^{+3}\gamma_3 S^{-3}$ (correspondance en traits pleins, figure 19).

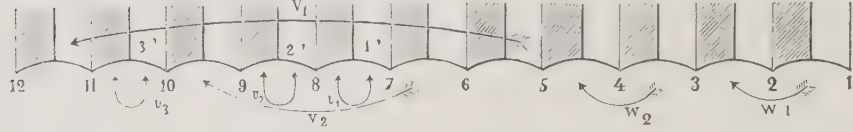


Fig. 19.

$$\begin{aligned}
 s &= S^{11} &= \omega + 11 & \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \\
 u_1 &= S^{-4}TS &= \frac{\omega + 2}{-\omega - 1} & \begin{pmatrix} 1, 2 \\ -1, -1 \end{pmatrix} \text{ p\'eriode 2, suivant module 11,} \\
 u_2 &= S^{-2}TS^2 &= \frac{2\omega + 5}{-\omega - 2} & \begin{pmatrix} 2, 5 \\ -1, -2 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 2 \quad \text{»} \\
 u_3 &= S^{-4}TS^4 &= \frac{4\omega + 17}{-\omega - 4} & \begin{pmatrix} 4, 6 \\ -1, -4 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 2 \quad \text{»} \\
 w_1 &= S^4TS^{-5} &= \frac{4\omega - 21}{\omega - 5} & \begin{pmatrix} 4, 1 \\ 1, -5 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 3 \quad \text{»} \\
 w_2 &= S^2TS^{-3} &= \frac{2\omega - 7}{\omega - 3} & \begin{pmatrix} 2, 4 \\ 1, -3 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 3 \quad \text{»} \\
 v_1 &= S^{-5}TS^{-1} &= \frac{5\omega - 4}{-\omega + 1} & \begin{pmatrix} 5, -4 \\ 1, 1 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 5 \quad \text{»} \\
 v_2 &= S^{-3}T &= \frac{3\omega + 1}{-\omega} & \begin{pmatrix} 3, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 5 \quad \text{»}
 \end{aligned}$$

GROUPE γ_4 (figure 13).

$$\begin{aligned}
 s &= S^{11} &= \omega + 11 & \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \\
 u_1 &= T &= \frac{-1}{\omega} & \begin{pmatrix} 0, -1 \\ 1, 0 \end{pmatrix} \text{ p\'eriode 2, suivant module 11,} \\
 u_2 &= S^2TS^{-2} &= \frac{2\omega - 5}{\omega - 2} & \begin{pmatrix} 2, -5 \\ 1, -2 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 2 \quad \text{»} \\
 u_3 &= S^{-2}TS^2 &= \frac{2\omega + 5}{-\omega - 2} & \begin{pmatrix} 2, 5 \\ -1, -2 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 2 \quad \text{»}
 \end{aligned}$$

$$w_1 = S^3TS^{-4} = \frac{3\omega - 13}{\omega - 4} \equiv \begin{pmatrix} 3, & -2 \\ 1, & -4 \end{pmatrix} \text{ période 3, suivant module 11,}$$

$$w_2 = S^{-4}TS^3 = \frac{4\omega + 13}{-\omega - 3} \equiv \begin{pmatrix} 4, & 2 \\ -1, & -3 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 3 \quad \text{»}$$

$$v_1 = STS^{-5} = \frac{\omega - 6}{\omega - 5} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 5 \\ 1, & 6 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 5 \quad \text{»}$$

$$v_2 = S^{-5}TS = \frac{5\omega + 6}{-\omega - 1} \equiv \begin{pmatrix} 5, & 6 \\ -1, & -1 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 5 \quad \text{»}$$

GROUPE γ_5 (figure 14).

A en commun avec γ_4 les substitutions génératrices s, u_1, v_1, v_2 .

$$u_2 = S^4TS^{-4} = \frac{4\omega - 17}{\omega - 4} \equiv \begin{pmatrix} 4, & 5 \\ 1, & -4 \end{pmatrix} \text{ période 2, module 11,}$$

$$u_3 = S^{-4}TS^4 = \frac{4\omega + 17}{-\omega - 4} \equiv \begin{pmatrix} 4, & 6 \\ -1, & -4 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 2 \quad \text{»}$$

$$w_1 = S^2TS^{-3} = \frac{2\omega - 7}{\omega - 3} \equiv \begin{pmatrix} 2, & 4 \\ 1, & -3 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 3 \quad \text{»}$$

$$w_2 = S^{-3}TS^2 = \frac{-3\omega - 7}{\omega + 2} \equiv \begin{pmatrix} 3, & 7 \\ -1, & -2 \end{pmatrix} \quad \text{»} \quad 3 \quad \text{»}$$

GROUPE γ_6 (fig. 15, correspondance marquée en gros traits).

A en commun avec γ_4 et γ_5 les substitutions s, u_1, v_1, v_2 ,

avec γ_4 seulement : w_1 et u_2 ,

avec γ_5 seulement : w_2 et u_3 .

Un coup d'œil sur les tableaux précédents montre que le G_s auquel se réduit un de nos groupes γ_i suivant le module 11, contient toujours des substitutions de période 2, 3, 5. Son ordre s est donc divisible par 30 ; on sait d'autre part que le groupe G_{660} auquel se réduit le groupe modulaire, suivant le module 11, ne peut contenir que des groupes d'ordre 2, 3, 5, 6, 11 (groupes cycliques), 4 (groupes trièdres), 6, 10, 12 (du type dièdre), 12 (type tétraèdre), 55 (demi métacycliques) et 60 (type

icosaèdre) ⁽¹⁾. Seuls les groupes du type icosaèdre et le groupe G_{660} ont leur ordre divisible par 30 ; G_s sera donc ou bien l'un des groupes G_{60} , ou bien G_{660} lui-même. Si donc le groupe γ_i est définissable par des congruences, il se confondra avec l'un des groupes Γ_{41} du théorème de Galois donnant lieu à la résolvante du onzième degré de l'équation modulaire. Comme deux des groupes γ_i ne peuvent être semblables dans le groupe modulaire et qu'il n'y a que deux systèmes de chacun onze groupes congruents semblables Γ_{41} (ces deux systèmes n'étant pas semblables entre eux dans Γ), il y aura au plus parmi les dix groupes $\gamma_1^{(a)}, \gamma_1'^{(a)}, \gamma_2^{(a)}, \gamma_2'^{(a)}, \gamma_3^{(a)}, \gamma_3'^{(a)}, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_6'$ deux groupes congruents ; les huit autres ne montreront sûrement aucun caractère congruent.

Nous allons montrer, par l'examen détaillé des dix sous-groupes que deux d'entre eux sont effectivement congruents, les autres non.

Groupes $\gamma_1^{(a)}$ et $\gamma_1'^{(a)}$. — Ces deux groupes sont congruents. Comme ils sont transformables l'un dans l'autre par l'opération $\omega' = -\omega_1$ ($\omega_1 = x - iy$, si $\omega = z + iy$), il suffit de le montrer pour le premier d'entre eux. Dans le groupe G_s qui correspond à $\gamma_1^{(a)}$ se trouve évidemment la substitution $U \equiv w_2^{-4} u_1 u_2 \equiv \begin{pmatrix} 3, 0 \\ 0, 4 \end{pmatrix} \pmod{11}$ et l'on a : $U^5 \equiv 1 \pmod{11}$. D'ailleurs $u_3^2 \equiv 1$. D'autre part : $U u_3 \equiv \begin{pmatrix} 3, & 6 \\ -4, & -4 \end{pmatrix} \pmod{11}$ et l'on a $(U u_3)^3 \equiv 1$.

La substitution U et la substitution $V \equiv u_3$, entre lesquelles on a les relations

$$U^5 \equiv 1, V^2 \equiv 1, (UV)^3 \equiv 1 \pmod{11}$$

engendrent donc, d'après un théorème de M. Walter Dyck ⁽²⁾, un groupe G_{60} du type icosaèdre. Dans ce groupe sont comprises toutes

(1) Voir Klein-Fricke, *Vorlesungen*, 2^e partie, chap. VIII et IX, et en particulier paragraphe 12 du chapitre IX, page 485, vol. I.

(2) W. DYCK : *Gruppentheoretische Studien*, *Mathematische Annalen*, vol. XX, page 1 (1882).

les substitutions génératrices du groupe $\gamma_1^{(a)}$ réduites suivant le module 11. On a, en effet, comme nous le verrons plus bas (§ 23, p. 93), entre les génératrices de $\gamma_1^{(a)}$, les relations

$$sc_1 u_1 w_1 = 1, \quad v_1^{-1} c_2 v_2 = 1, \quad v_2^{-1} u_3 u_2 = 1$$

d'où l'on tire, puisque $s \equiv 1 \pmod{11}$,

$$v_1 = w_2 v_2, \quad v_2 = u_3 u_2, \quad w_1^{-1} = v_1 u_1 = u_2 v_2 u_1.$$

D'autre part $u_3 = V$; et de la définition de U on tire $w_2 = u_1 u_2 U^{-1}$, de sorte que l'on a :

$$s \equiv 1, \quad u_3 = V, \quad w_1^{-1} = w_2 c_2 u_1 = u_2 U^{-1} V u_2, \quad w_2 = u_1 u_2 U^{-1}, \\ c_1 = u_1 u_2 U^{-1} V u_2, \quad v_2 = V u_2.$$

Enfin on vérifie sans peine les congruences

$$u_2 \equiv U^2 V U^2 V U^3 V \quad \text{et} \quad u_1 \equiv U^2 V U^3 u_2.$$

Toutes les substitutions du groupe G_s s'exprimant à l'aide de U et V , on aura $s = 60$, et par suite le groupe $\gamma_1^{(a)}$ est congruent.

La démonstration aurait pu être faite en partant d'une autre substitution U de période 5. Toute la difficulté consisterait, dans ce cas, à trouver la substitution V de période 2 (mod. 11) qu'on doit lui associer, et telle que les relations (1) de plus haut soient vérifiées; et en outre à exprimer les différentes génératrices, réduites suivant le module 11, en fonction de U et V , ce qui exige nécessairement quelques tâtonnements.

Le choix de U et V adopté ici est celui de M. Klein, *Vorlesungen...*, page 419, vol. II. C'est pour pouvoir adopter ce choix que nous avons remplacé plus haut le groupe γ_1 par le groupe semblable $\gamma_1^{(a)}$.

Les huit autres groupes γ_i , définis plus haut, ne sont pas définissables par des congruences, de sorte que $s = 660$. Si l'on veut vérifier ce fait il faut chercher à établir dans chaque cas particulier l'existence de substitutions congrues à S et T ; on réussit sans trop

de difficulté à démontrer l'existence de la substitution congrue à S en opérant ainsi :

On cherche à obtenir deux substitutions du groupe G_s ayant la forme : $\frac{\alpha\omega + \beta}{\delta}, \frac{\delta\omega + \beta_1}{\alpha} \pmod{11}$. Par leur combinaison on obtient puisque $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{11}$, la substitution $\begin{pmatrix} 1, \alpha(\beta + \beta_1) \\ 0, 1 \end{pmatrix} \equiv S^{\alpha(\beta + \beta_1)}$, qui, élevée à une puissance θ telle que $\alpha(\beta + \beta_1)^\theta \equiv 1 \pmod{11}$ donne S ; S est donc congrue avec une opération de G_s . La méthode comporte quelques tâtonnements.

La substitution T fait partie des substitutions génératrices, sauf pour γ_3 .

Nous indiquons rapidement les calculs à effectuer pour cette vérification.

$\gamma_2^{(a)}$ et $\gamma_2'^{(a)}$. — On a :

$$V \equiv u_2 v_1 u_2 \equiv \frac{3\omega - 1}{4} \pmod{11}.$$

D'autre part

$$(w_1 w_2)^2 V \equiv \frac{6\omega + 6}{\omega + 6} \quad \text{et} \quad (w_1 w_2)^2 V u_3 \equiv \frac{6}{9\omega - 1},$$

d'où

$$U \equiv u_2 (w_1 w_2)^2 V u_3 \equiv \frac{2\omega + 1}{6} \pmod{11},$$

et enfin

$$U^2 \equiv \frac{4\omega + 8}{3}.$$

On en conclut

$$[U^2 V]^9 \equiv [S^5]^9 \equiv S \pmod{11}.$$

$\gamma_3^{(a)}$ et $\gamma_3'^{(a)}$. — Ici il faut démontrer l'existence d'une substitution congrue à T, et d'une substitution congrue à S. On posera

$$U \equiv w_2^{-1} w_1 \quad \text{et} \quad V \equiv v_1^2 u_1.$$

On vérifie sans peine que

$$V U^{-1} \equiv T \equiv \begin{pmatrix} 0, -1 \\ 1, 0 \end{pmatrix} \pmod{11}.$$

D'autre part

$$[v_2 T]^7 \equiv [\omega - 3]^7 \equiv [S^{-3}]^7 \equiv S \pmod{11}.$$

γ_4 . — Ici l'on a

$$u_1 v_2 v_1 \equiv \frac{2\omega}{6} \pmod{11},$$

et par suite :

$$U \equiv (u_1 v_2 v_1)^2 \equiv \frac{4\omega}{3} \pmod{11}.$$

D'ailleurs,

$$V \equiv u_1 w_1 u_2 u_1 \equiv \frac{3\omega + 2}{4} \pmod{11}.$$

Par suite,

$$(VU)^2 \equiv [S^6]^2 \equiv S \pmod{11}.$$

Le groupe γ_6 ayant en commun avec γ_4 les génératrices u_1, v_1, v_2, w_1 et u_2 , la vérification est en même temps faite pour γ_6 et γ'_6 ,

γ_5 . — Enfin, dans le cas du groupe γ_5 , on a

$$U \equiv u_1 v_2 v_1 \equiv \frac{2\omega}{6}, \quad V \equiv u_1 w_2^{-1} \equiv \frac{6\omega + 1}{2},$$

et par suite

$$VU \equiv \omega + 1 \equiv S \pmod{11}.$$

Les propriétés arithmétiques des huit groupes $\gamma_2^{(a)}, \dots, \gamma_6, \gamma'_6$ sont donc négatives.

§ 23. — *De l'isomorphisme des groupes γ .*

Il s'agit, dans ce qui va suivre, des groupes $\gamma_1^{(a)}, \gamma_1'^{(a)}, \gamma_2^{(a)}, \gamma_2'^{(a)}, \dots, \gamma_6, \gamma'_6$. Ces dix sous-groupes de même indice, ayant tous huit substitutions génératrices, dont trois elliptiques de période 2, deux elliptiques de période 3, une parabolique d'amplitude 11, et les deux autres hyperboliques, il est naturel de se demander s'il n'y a pas isomorphisme entre ces groupes.

Les deux groupes γ_i, γ'_i , dont les polygones sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe imaginaire, étant transformables l'un dans l'autre par la symétrie $A = -\omega_i$, sont semblables dans le groupe modulaire généralisé par l'introduction de symétries, et par suite sont isomorphes holoédriques. Nous ne nous occupons pas de l'isomorphisme par symétrie ; et nous étudions seulement l'isomorphisme des six groupes $\gamma_1^{(a)}, \gamma_2^{(a)}, \dots, \gamma_6$.

Ces groupes sont des groupes *fuchsiens* ⁽¹⁾ ; le polygone fondamental de l'un de ces groupes γ_i contient un seul sommet de la deuxième sorte, $\omega = i\infty$, et quinze sommets de la première sorte ; il ne contient qu'un cycle de la deuxième catégorie, formé par le seul sommet $\omega = i\infty$, et des cycles de première catégorie ; γ_i est donc de la sixième famille.

A chaque cycle de première catégorie correspond, comme on sait, une relation fondamentale entre les substitutions génératrices ; et l'on obtiendra toutes les relations fondamentales de cette nature en considérant successivement les différents cycles. D'autre part, si deux groupes ont le même nombre de génératrices, et si entre les génératrices existent les mêmes relations fondamentales, il y aura isomorphisme entre les deux groupes ; sinon, non. Nous sommes donc amenés à étudier les cycles formés par les sommets des polygones fondamentaux des γ_i et les relations fondamentales qui en dépendent.

Si l'on désigne les sommets de la première sorte de l'un des polygones par $1, 2, 3, \dots, 12$ et $1', 2', 3'$, les douze premiers numéros étant relatifs aux sommets effectifs du polygone $F_{11}^{(\omega)}$ la limite inférieure étant parcourue dans le sens de la flèche (fig. 5, page 72), $1', 2', 3'$ désignant les milieux des arcs qui se correspondent à eux-mêmes, on trouve sans difficulté pour les cycles des groupes γ_i les résultats suivants :

(1) Voir, pour les propriétés des groupes fuchsiens, le beau mémoire de M. Poincaré, *Théorie des groupes fuchsiens*, *Acta Mathematica*, vol. I, page 1.

$$\gamma_1^{(a)} : (1, 3, 4, 12), (2), (5, 9, 11), (6, 7, 8), (10), (1'), (2'), (3') \quad (\text{fig. 17}).$$

$$\gamma_2^{(a)} : (1, 2, 10, 12), (3, 5, 9), (6, 7, 8), (4), (11), (1'), (2'), (3') \quad (\text{fig. 18}).$$

$$\gamma_3 : (1, 3, 5, 12), (6, 10, 11), (7, 8, 9), (2), (4), (1'), (2'), (3') \quad (\text{fig. 19}).$$

$$\gamma_4 : (1, 6, 7, 12), (2, 4, 5), (8, 9, 11), (3), (10), (1'), (2'), (3') \quad (\text{fig. 13}).$$

$$\gamma_5 : (1, 6, 7, 12), (2, 3, 5), (8, 10, 11), (4), (9), (1'), (2'), (3') \quad (\text{fig. 14}).$$

$$\gamma_6 : (1, 6, 7, 12), (2, 4, 5), (8, 10, 11), (3), (9), (1'), (2'), (3') \quad (\text{fig. 15}).$$

Les sommets dont les numéros sont compris dans une même parenthèse forment un cycle.

On voit d'après cela que dans tous les cas les douze sommets se groupent en huit cycles, un du quatrième ordre, deux du troisième, et cinq du premier.

La somme des angles des trois premiers cycles est toujours 2π , la somme des angles pour trois des cycles du premier ordre est π , et pour les deux autres $\frac{2\pi}{3}$.

D'après cela, les relations qui correspondent aux cycles du quatrième et du troisième ordre s'obtiendront en faisant le produit des substitutions qui permettent de passer d'un sommet du cycle au sommet suivant, et en exprimant que ce produit est l'opération identique. Pour ces cycles du premier ordre, il suffira d'exprimer que la substitution génératrice, dont le point unique formant le cycle est un point fixe, est de période 2 ou 3.

D'après cela, les relations fondamentales entre les substitutions génératrices des groupes γ_i sont les suivantes : (voir les figures correspondantes).

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(a)} : & s v_1 u_1 w_1 = 1, v_1^{-1} u_2 v_2 = 1, v_2^{-1} u_3 u_2 = 1, u_1^2 = 1, u_2^2 = 1, u_3^2 = 1, u_4^2 = 1, w_2^3 = 1, \\ \gamma_2^{(a)} : & s w_2 v_1 u_1 = 1, v_1^{-1} v_2 w_4 = 1, v_2^{-1} u_3 u_2 = 1, u_4^2 = 1, u_2^2 = 1, u_3^2 = 1, w_4^2 = 1, w_7^3 = 1, \\ \gamma_3 : & s v_1 u_2 u_1 = 1, v_1^{-1} u_3 v_2 = 1, v_2^{-1} u_2 u_1 = 1, u_4^2 = 1, u_2^2 = 1, u_3^2 = 1, u_4^3 = 1, w_2^3 = 1, \\ \gamma_4 : & s v_2 u_1 v_1 = 1, v_1^{-1} u_2 w_1 = 1, v_2^{-1} w_2 u_3 = 1, u_4^2 = 1, u_2^2 = 1, u_3^2 = 1, w_4^2 = 1, w_2^3 = 1, \\ \gamma_5 : & s v_2 u_1 v_1 = 1, v_1^{-1} u_1 u_2 = 1, v_2^{-1} u_3 u_2 = 1, u_4^2 = 1, u_2^2 = 1, u_3^2 = 1, u_3^3 = 1, u_2^3 = 1, \\ \gamma_6 : & s v_2 u_1 v_1 = 1, v_1^{-1} u_2 u_1 = 1, v_2^{-1} u_3 u_2 = 1, u_4^2 = 1, u_2^2 = 1, u_3^2 = 1, u_1^3 = 1, u_2^3 = 1. \end{aligned}$$

Les cinq relations placées à droite sont les mêmes dans chaque ligne et sont évidentes à priori. On peut vérifier facilement l'exactitude des autres relations en se servant des expressions en S et T données plus haut pour les génératrices des groupes γ_i , en tenant compte de la relation $(ST)^3 = 1$ qui s'écrit aussi $(TS)^3 = 1$.

Les six systèmes de relations ci-dessus sont tous différents les uns des autres; car, déjà dans les quatre premiers systèmes, la première relation a une constitution différente; dans les trois derniers systèmes cette première relation est bien la même; mais les deux suivantes sont différentes pour γ_4 et γ_5 ; quant à γ_6 , il diffère de γ_4 par la troisième des relations, de γ_5 par la seconde.

Pour qu'on puisse conclure de là qu'il n'y a pas isomorphisme entre les groupes γ_i , il faut montrer que la condition reconnue nécessaire pour qu'il n'y ait pas isomorphisme entre les groupes γ_i est suffisante. Un groupe γ_i peut en effet être engendré par une infinité de systèmes de huit substitutions génératrices, correspondant aux formes en nombre infini que peut prendre le polygone fondamental du groupe. Rien ne prouve encore qu'en choisissant convenablement le système de substitutions génératrices il ne sera pas possible d'établir une correspondance isomorphe holoédrique entre les deux groupes γ_i, γ_k .

Pour établir ce point, je vais prouver que, quel que soit le polygone générateur fondamental considéré pour γ_i , la forme des relations entre les substitutions génératrices correspondantes reste la même.

Je considère dans ce qui suit des polygones fondamentaux formés d'un seul morceau du demi plan positif des ω , et composés d'un nombre entier de doubles triangles *complets* de la division modulaire. Les groupes γ_i étant d'indice 11, le nombre de ces doubles triangles sera onze. Ceci posé, désignons par R_0 le polygone fondamental déterminé plus haut pour le groupe γ_i . Soit S_0 une portion de R_0 composée d'un nombre entier de doubles triangles complets (ce qui ne restreint pas la généralité) et S_1 la région transformée de S_0 par une substitution V de γ_i . Considérons le polygone $R_0 - S_0 + S_1$. C'est un polygone fondamental de γ_i auquel nous

pouvons appliquer le même mode de transformation. En continuant ainsi, nous remplacerons le polygone R_o par un certain polygone R'_o qui sera encore fondamental pour γ_i .

Ce polygone, par un choix convenable des substitutions V , se composera d'un ensemble de onze doubles triangles formant un tout continu. Etudions les cycles du polygone R'_o . Le polygone R_o contenait des cycles de première catégorie, et un seul cycle de troisième sous-catégorie formé du seul sommet $\omega = i\infty$; la substitution génératrice correspondante de γ_i était en effet $S = S'' = \omega + 11$, qui est parabolique d'amplitude 11. Or, on sait que dans une transformation analogue à celle qui permet de passer de R_o à R'_o , le nombre des cycles de troisième sous-catégorie ne change pas ⁽¹⁾. Le polygone R'_o présentera donc un sommet sur l'axe réel. Ce sommet étant un sommet de double triangle sera rationnel réel $\frac{\alpha}{\beta}$. D'autre part, les arêtes du polygone R'_o aboutissant au point $\frac{\alpha}{\beta}$ se correspondront par substitution parabolique, et cette substitution parabolique sera d'amplitude *onze*, sans quoi le groupe γ_i serait de classe $11k$, avec $k > 1$ et entier, ce qui ne peut avoir lieu. Les onze doubles triangles composant R'_o auront donc pour sommet d'angle nul commun $\frac{\alpha}{\beta}$, et formeront un éventail ayant pour sommet ce point

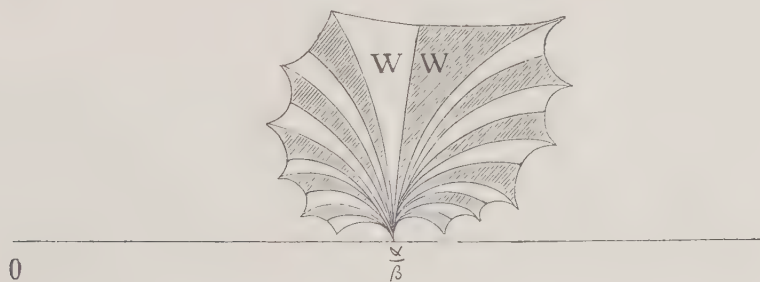


Fig. 20.

(1) Voir : Poincaré, *Mémoire sur les groupes fuchsien*s, *Acta Mathematica*, tome I, pages 44-45.

Soit W le double triangle placé au milieu de la série de ces onze triangles. Les dix autres seront $WS^{\pm\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$) [fig. 20]. Ceci posé transformons le polygone R_o de γ_i par W . Le double triangle 1 devient W , les triangles $S^{\pm\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$), $WS^{\pm\alpha}$. R_o se transforme précisément en R'_o . R_o est d'autre part le polygone fondamental du groupe $W\gamma_i W^{-1}$ semblable à γ_i . Mais il est aussi, par construction, polygone fondamental de γ_i . Donc W appartient au groupe γ_i et la correspondance des arêtes de R'_o s'obtient par la transformation de la correspondance des arêtes de R_o . D'autre part désignons par $s, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, w_1$ et w_2 le premier système de substitutions génératrices de γ_i ; en posant $S' = WS W^{-1}$, $u'_1 = Wu_1 W^{-1}, \dots, w'_2 = Ww_2 W^{-1}$; $s', u'_1, \dots, w'_2$ constituent un système de substitutions génératrices de γ_i et relatif à une forme quelconque du polygone fondamental.

Les substitutions $s', u'_1, u'_2, u'_3, v'_1, v'_2, w'_1, w'_2$ sont de même période ou de même espèce (elliptiques, paraboliques ou hyperboliques) que les substitutions correspondantes $s, u_1, u_2, \dots$. D'autre part, si l'on a entre $s, u_1, u_2, \dots, w_2$ une relation de la forme $f(s, u_1, u_2, \dots, w_2) = 1$, on aura aussi $f(s', u'_1, u'_2, \dots, w'_2) = 1$, et inversement.

Les relations entre les génératrices de γ_i (polygone R'_o) et celles de γ_i (polygone R_o) sont donc de même forme, ce que nous nous proposons d'établir. On conclut de là qu'il ne peut y avoir isomorphisme entre les groupes γ ; c'est encore un résultat négatif que l'on obtient ici.

La démonstration employée réussit : 1^o parce que le polygone R_o ne contient qu'un *seul* cycle de troisième sous-catégorie, n'embrassant qu'un seul sommet; 2^o parce que le groupe γ_i est de classe 11, c'est-à-dire de classe exprimée par un nombre premier.

§ 24. — *Les résolvantes de l'équation modulaire
qui correspondent aux sous-groupes $\gamma_{(i)}$.*

A chacun des sous-groupes γ_i étudiés dans les paragraphes précédents correspond une résolvante de l'équation modulaire (§ 17). La forme de cette résolvante est très simple. La surface de Riemann à onze feuillets $F_{11}^{(i)}$ qui correspond à ce groupe possède, comme étant de genre 0, des fonctions *fondamentales* qui sont monovalentes. Soit t l'une d'elles que nous appellerons *module fondamental*; elle est entièrement déterminée si l'on donne sa valeur en trois points distincts de la surface de Riemann; toutes les autres fonctions fondamentales de la surface s'expriment linéairement en fonction de t , sous la forme :

$$(1) \quad \tau = \frac{Lt + N}{Mt + P} \quad LP - MN \neq 0.$$

Toute autre fonction de la surface est une fonction rationnelle de t ; en particulier la fonction J de la surface est une fonction rationnelle du onzième degré en t , de sorte que l'on a :

$$(2) \quad J = \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}^{(1)},$$

$\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ étant des polynômes premiers entre eux du onzième degré en t . L'équation (2) est la résolvante cherchée. Elle contient vingt-trois coefficients essentiels encore indéterminés; mais la connaissance de la ramification de la fonction $t(J)$ va nous permettre de réduire le nombre des coefficients inconnus dans (2).

La fonction t a trois points de ramification : au point $J = 0$, neuf des onze valeurs de t deviennent égales trois à trois, les deux autres sont *inégaies* et différentes des précédentes; ceci revient à

(1) Je sous entends partout dans ce qui suit que les résolvantes en question sont des équations irréductibles.

dire que l'équation $\Phi(t) = 0$ a trois racines triples et deux racines simples, de sorte que :

$$(3) \quad \Phi(t) = g(t^2 + \lambda t + \mu)(t^3 + l_1 t^2 + l_2 t + l_3)^3.$$

Le point $J = \infty$, qui est aussi un point de ramification, est tel qu'en ce point les onze racines de l'équation en t sont égales, ce qui exige manifestement que

$$(4) \quad \Psi(t) = k(t - p)^{11}.$$

Enfin, au troisième point de ramification $J = 1$, l'équation en t a quatre racines doubles et trois simples, de sorte que l'on a identiquement, en posant $\chi(t) = \Phi(t) - \Psi(t)$,

$$(5) \quad \chi(t) = \Phi(t) - \Psi(t) = h(t^3 + m_1 t^2 + m_2 t + m_3)(t^4 + n_1 t^3 + n_2 t^2 + n_3 t + n_4)^2,$$

ce qui, sous forme explicite, s'écrit :

$$(5 \text{ bis}) \quad g(t^2 + \lambda t + \mu)(t^3 + l_1 t^2 + l_2 t + l_3)^3 - k(t - p)^{11} = h(t^3 + m_1 t^2 + m_2 t + m_3)(t^4 + n_1 t^3 + n_2 t^2 + n_3 t + n_4)^2.$$

tandis que la résolvante (2) se met généralement sous la forme :

$$(6) \quad J : J - 1 : 1 = \Phi(t) : \chi(t) : \Psi(t).$$

Les polynômes Φ , χ , Ψ contiennent seize coefficients seulement ; l'un quelconque d'entre eux, par exemple g , peut être choisi arbitrairement, égal à 1 par exemple, et, entre les quinze coefficients qui restent il y a, d'après l'identité (5 bis), douze relations. Il semble donc qu'il y a indétermination, puisque douze des coefficients pourront s'exprimer en fonction de trois autres coefficients demeurant arbitraires ; mais l'indétermination n'est qu'apparente. En effet le module t peut être fixé d'une infinité de manières ; et il sera entièrement déterminé si l'on donne sa valeur en trois points distincts de la surface de Riemann ; on pourra par exemple se

donner la valeur que prend t dans un feuillet déterminé aux trois points $J = 0, 1, \infty$ (le feuillet étant différent pour ces trois points). Ceci revient à donner l'un des facteurs du premier degré de chacun des polynômes Φ, χ, Ψ , ou bien trois nouvelles relations entre les quinze coefficients; le nombre des coefficients étant égal à celui des relations, il est possible de calculer ces coefficients.

Nous déterminons dans ce qui suit le module fondamental t en supposant qu'il est infini pour $J = \infty$, et que les valeurs de t qui ont lieu dans les deux feuillets isolés au point $J = 0$ sont les racines de l'équation du second degré $t^2 + \lambda t + \mu = 0$, où λ et μ sont des nombres quelconques. Ceci revient à supposer λ et μ connus dans (3), et à remplacer $\Psi(t)$ par une constante k_1 qui est la limite de $k p^{11}$, lorsqu'on fait tendre k vers zéro, et croître p au-delà de toute limite.

Si l'on fait en outre $g = 1$ on aura nécessairement $h = 1$, de sorte que :

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= (t^2 + \lambda t + \mu)(t^3 + l_1 t^2 + l_2 t + l_3)^3, \\ \chi(t) &= (t^3 + m_1 t^2 + m_2 t + m_3)(t^4 + n_1 t^3 + n_2 t^2 + n_3 t + n_4)^2, \\ \Psi(t) &= k_1.\end{aligned}$$

L'identité $\Phi(t) - \Psi(t) = \chi(t)$, qu'on peut remplacer par $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\chi}{dt}$, nous donne entre les dix coefficients inconnus $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, n_4$ et les quantités connues λ et μ , dix équations algébriques entières dont les coefficients sont des polynômes en λ et μ à coefficients entiers. Quant à k_1 , il s'exprime rationnellement en fonction de μ, l_3, n_4 sous la forme $k_1 = \mu l_3^3 - m_3 n_4^2$.

Nous désignons par (H) le système formé par les dix équations algébriques à dix inconnues qui donnent $l_1, l_2, \dots, n_3, n_4$. La résolution de ce système (H) donnera la valeur des coefficients de la résolvante mise sous la forme (6) en fonction de λ et μ qui demeurent arbitraires.

Étudions ce système (H). A toute solution de H (l'_i, m'_j, n'_k) correspond une résolvante (6), et à cette résolvante une des dix surfaces de Riemann f (§ 20, page 63). A toute surface f correspond *au moins* une résolvante, et par suite une solution du système

H; on peut dire, d'une manière plus précise, qu'à toute surface f correspondent deux solutions du système H. En effet, nous avons défini plus haut le module t en nous donnant sa valeur au point $J = \infty$, et aux deux points de f situés en $J = 0$ dans les deux feuillets isolés. La valeur de t en ces points n'est d'ailleurs pas fixée avec précision, car nous n'avons pas précisé laquelle des deux racines de l'équation $t^2 + \lambda t + \mu = 0$ doit être prise pour valeur de t dans chacun des deux feuillets. Si nous désignons par θ_1, θ_2 les numéros de ces deux feuillets isolés, nous avons deux modules t, t' qui répondent à notre définition; ces modules sont définis comme il suit :

t : infini pour $J = \infty$, $= t_0$ en $J = 0$ feuillet θ_1 et $= t_1$ en $J = 0$ feuillet θ_2 ,
 t' : infini pour $J = \infty$, $= -t_1$ en $J = 0$ feuillet θ_1 et $= t_0$ en $J = 0$ feuillet θ_2 .

t_0 et t_1 désignent les racines de l'équation $t^2 + \lambda t + \mu = 0$.

Parmi les solutions du problème H se trouvent donc celle qui correspond au module t et celle qui correspond au module t' . Ces deux résolvantes correspondent d'ailleurs à la même surface f . A chaque surface f correspond donc un couple de deux solutions du problème H, qui est ainsi du 20° degré.

Les deux solutions qui répondent à une même surface f présentent d'ailleurs entre elles un lien remarquable; t' et t étant tous deux modules fondamentaux de f et ayant le même pôle ($J = \infty$), sont liés d'après (1) par une relation de la forme

$$t' = L_1 t + M_1.$$

Comme pour $t = t_0$, $t' = t_1$, et pour $t = t_1$, $t' = t_0$, on aura, pour déterminer L_1 et M_1 les deux équations

$$t_1 = L_1 t_0 + M_1, \quad t_0 = L_1 t_1 + M_1$$

qui donnent, puisque $t_1 - t_0 \neq 0$,

$$L_1 = -1, \quad M_1 = t_0 + t_1 = -\lambda,$$

de sorte que $t' = -t - \lambda$.

Si donc

$$J : J - 1 : 1 = \Phi(t) : \chi(t) : \Psi(t)$$

est la résolvante qui répond au module t ,

$$(7) \quad J : J - 1 : 1 = \Phi(-t' - \lambda) : \chi(-t' - \lambda) : \Psi(-t' - \lambda)$$

sera celle qui répond au module t' . Si $(l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, n_4, k_1)$ sont les valeurs des coefficients de la résolvante en t , et $l'_1, \dots, m'_1, \dots, n'_1, \dots, k'_1$ celles des coefficients de la résolvante en t' , on aura des relations simples entre ces deux séries de nombres.

L'équation (7) développée s'écrit en effet :

$$(8) \quad \begin{aligned} J : J - 1 : 1 &= (t'^2 + \lambda t' + \mu)[t'(t' + \lambda)^3 - l_1(t' + \lambda)^2 + l_2(t' + \lambda) - l_3]^3 \\ &: [(t' + \lambda)^3 - m_1(t' + \lambda)^2 + m_2(t' + \lambda) - m_3] \\ &: [t'(t' + \lambda)^4 - n_1(t' + \lambda)^3 + n_2(t' + \lambda)^2 - n_3(t' + \lambda) + n_4]^2 : -k_1. \end{aligned}$$

On a donc :

$$(9) \quad \begin{cases} l'_1 = 3\lambda - l_1, & l'_2 = 3\lambda^2 - 2\lambda l_1 + l_2, & l'_3 = \lambda^3 - \lambda^2 l_1 + \lambda l_2 - l_3, \\ m'_1 = 3\lambda - m_1, & m'_2 = 3\lambda^2 - 2\lambda m_1 + m_2, & m'_3 = \lambda^3 - \lambda^2 m_1 + \lambda m_2 - m_3, \\ n'_1 = 4\lambda - n_1, & n'_2 = 6\lambda^2 - 3\lambda n_1 + n_2, & n'_3 = 4\lambda^3 - 3\lambda^2 n_1 + 2\lambda n_2 - n_3, \\ & k'_1 = -k_1, & n'_4 = \lambda^4 - n_1 \lambda^3 + n_2 \lambda^2 - n_3 \lambda + n_4. \end{cases}$$

Donc les deux solutions qui correspondent aux modules t, t' sont telles que les nombres qui composent l'une s'expriment rationnellement en fonction des nombres qui composent la deuxième et de l'indéterminée λ .

Les relations entre les (l, m, n) et les (l', m', n') sont d'ailleurs susceptibles d'une double forme, car elles sont symétriques par rapport aux deux séries de lettres qui y figurent.

Considérons maintenant l'une des surfaces de Riemann f et l'un des deux modules fondamentaux qui correspondent à un système donné de valeurs de $\lambda, \mu, \lambda_0, \mu_0$; il leur correspond une solution parfaitement déterminée du système H $(l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1,$

n_2, n_3, n_4). Déplaçons les quantités complexe λ_0 et μ_0 dans leurs plans respectifs de faire à leur faire décrire un chemin quelconque. Cette opération, qui *n'altère nullement la surface de Riemann considérée*, puisque les points de ramification de cette dernière sont restés invariables, revient à changer le module fondamental. Rame-nons λ et μ à leurs valeurs initiales λ_0 et μ_0 de telle façon que λ et μ aient décrit dans leurs plans des chemins fermés quelconques. La surface de Riemann n'a pas changé, et le module fondamental que l'on a à considérer est ou bien le module fondamental t d'où l'on est parti, ou bien le module associé $t' = -t - \lambda$. Donc la solution $(l_1, l_2, \dots, n_k)$ s'est transformée en elle-même, ou dans la solution associée (l'_1, m'_1, n'_1) trouvée ci-dessus (formules 9) ; mais elle n'a pu se transformer dans aucune autre. Donc, *les vingt solutions du problème H se groupent en dix systèmes de chacun deux solutions* ⁽¹⁾ ; *les nombres qui figurent dans l'une des solutions s'expriment sous forme entière à l'aide de λ et constituent la deuxième solution ; les deux solutions, par le changement continu de λ et μ , peuvent se permuter entre elles, et ne s'échangent avec aucune autre solution.*

Le problème (H) est donc réductible ; il se décompose en dix problèmes distincts qui, par un procédé convenable, pourront être traités directement. C'est ainsi que M. Klein ⁽²⁾, par un procédé détourné, a pu dans le cas des groupes congruents γ_1 et γ'_1 , obtenir la résolvante (6) sous forme définitive et éviter par le choix convenable du module t , qu'il définit par son développement en série, l'apparition du module t' .

Il est évident qu'on aurait pu fixer tout autrement le module t . Le choix qui a été fait ici paraît encore le plus simple qu'on puisse faire. En effet, c'est celui pour lequel l'indétermination, ou pour mieux dire l'ambiguïté du module t est la plus simple, puisqu'à chaque système de valeurs de λ, μ correspondent seulement deux

(1) Cela tient, bien entendu, à la nature *algébrique* du problème H.

(2) Voir à ce sujet Klein-Fricke, *Vorlesungen*, 5^e partie, chap. v, p. 401, vol. II.

modules fondamentaux; tandis que dans tous les autres cas le nombre de ces modules est supérieur à deux.

La décomposition effective du problème (H) et le calcul des coefficients des résolvantes, possibles théoriquement, sont difficiles à réaliser. Même en choisissant λ et μ de la manière la plus simple possible, les calculs sont extrêmement complexes et comportent des coefficients numériques très grands. Les formules (9) montrent que le choix le plus convenable pour λ est $\lambda=0$, μ demeurant arbitraire. On a alors en effet :

$$\begin{aligned} l'_1 &= -l_1, l'_2 = l_2, l'_3 = -l_3, m'_1 = -m_1, m'_2 = m_2, m'_3 = -m_3, \\ n'_1 &= -n_1, n'_2 = -n_2, n'_3 = -n_3, n'_4 = n_4, k'_1 = -k_1, \end{aligned}$$

de sorte que, si l'on cherche l'équation du vingtième degré qui donne l_1 , cette équation ne contiendra que des puissances paires de l_1 . L'élimination des autres inconnues entre les dix équations confirme ces résultats. Mais les calculs correspondants sont, je le répète, trop étendus pour être donnés ici. Ils ne nous intéressent d'ailleurs qu'au point de vue purement théorique, car pour chacune des résolvantes dont il s'agit ici, nous connaissons les propriétés algébriques essentielles, c'est-à-dire la ramification et le groupe de monodromie.

§ 25. — *Les problèmes de Galois relatifs aux groupes γ_i .*

Nous allons maintenant considérer les résolvantes relatives aux groupes γ_i à un autre point de vue. On sait que tout sous-groupe non invariant dans le groupe modulaire contient comme sous-groupe au moins un groupe invariant dans le groupe modulaire; ce groupe Γ_v invariant, qui est contenu dans le groupe donné Γ_μ , est d'ailleurs commun à tous les groupes semblables avec Γ_μ dans le groupe modulaire; nous supposons que Γ_μ est le groupe invariant le plus étendu contenu dans Γ_μ ; v est un multiple de μ ; à Γ_v correspond une résolvante de l'équa-

tion modulaire de degré ν , et à Γ_μ une résolvante de degré μ ; mais cette dernière résolvante admet pour résolvante l'équation de degré ν , car ses racines s'expriment rationnellement en fonction des racines de l'équation de degré ν . En effet, soient

$$h_\mu(z, J) = 0 \quad , \quad h_\nu(y, J) = 0$$

les deux équations qui répondent aux groupes Γ_μ et Γ_ν . A l'aide de y et de J on peut exprimer rationnellement toutes les fonctions qui demeurent invariables par les substitutions de Γ_ν ; en particulier, toute racine de $h_\mu(z, J) = 0$ demeure invariable par les substitutions de Γ_ν qui est le groupe commun à tous les sous-groupes semblables à Γ_μ , et par suite s'exprime rationnellement en y et J . La résolution de l'équation $h_\nu(y, J) = 0$ entraîne donc celle de $h_\mu(z, J) = 0$. D'ailleurs, l'équation $h_\nu(z, J) = 0$ est telle que toutes ses racines s'expriment rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles et de J puisque le groupe Γ_ν est invariant dans le groupe modulaire (§ 18). Il en résulte que le groupe de monodromie de l'équation $h_\nu(y, J) = 0$ est d'ordre égal à ν , d'après un théorème bien connu de la théorie de Galois; et il est en outre isomorphe holoédrique avec le groupe des transformations en elle-même que comporte la surface de Riemann correspondante, c'est-à-dire avec le groupe G_ν auquel se réduit le groupe modulaire quand on y regarde comme identiques les substitutions de Γ_ν . Mais d'autre part il y a isomorphisme entre le groupe de monodromie g_μ de $h_\mu(z, J) = 0$ et celui de $h_\nu(y, J) = 0$. G_ν ; cet isomorphisme est holoédrique si g_μ est un groupe simple, et alors les racines de $h_\nu(y, J) = 0$ s'expriment elles aussi rationnellement en fonction de J et des racines de $h_\mu(z, J) = 0$; ou bien l'isomorphisme est mériédrique si le groupe g_ν est composé, l'ordre de g_ν étant d'ailleurs le plus élevé. Donc, dans tous les cas, l'indice ν du groupe invariant le plus général contenu dans Γ_μ est égal à l'ordre du groupe de monodromie de la résolvante $h_\mu(z, J) = 0$ de l'équation modulaire, ou à un multiple de cet ordre.

La connaissance complète des propriétés du groupe invariant

Γ_v permet d'étudier simplement, au moins en théorie, les fonctions qui appartiennent au groupe Γ_μ . Si, en effet, p est le genre du groupe Γ_v , toutes les fonctions qui demeurent invariables par les substitutions du groupe Γ_v s'expriment rationnellement en fonction des p fonctions algébriques, $\varphi_i = \frac{dj_i}{dJ}$ (voir § 17), linéairement indépendantes et entre lesquelles il y a des relations algébriques contenant J rationnellement.

Par l'effet d'une substitution modulaire quelconque ces fonctions φ_i éprouvent une substitution linéaire de la forme

$$\varphi_i = a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \dots + a_{ip}\varphi_p.$$

L'ensemble des substitutions linéaires ainsi obtenues forme un groupe d'ordre v isomorphe holoédrique au groupe G_v considéré plus haut. Toute fonction appartenant au groupe Γ_v s'exprime rationnellement en $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ et J ; il en est de même pour toute fonction z appartenant au groupe Γ_μ .

$$z = R(J, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p).$$

Comme d'autre part on connaît le développement en série de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ en tout point J de la surface de Riemann correspondante et par suite en tout point ω du polygone fondamental Γ_v , on pourra calculer le développement en série de z , fonction de ω dans le voisinage d'un point quelconque ω_0 ; en particulier, pour les valeurs très grandes de ω , on pourra obtenir un développement en série procédant suivant les puissances de $r = e^{2\pi i \omega}$.

La résolvante de l'équation modulaire qui correspond à Γ_v se met sous la forme

$$(2) \quad J : J - 1 : 1 = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) : \Psi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) : \chi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p).$$

et entre les φ on a $p - 1$ relations distinctes. Supposons que l'on se donne la valeur de J et que l'on se propose de calculer $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$. Le problème admettra v solutions; les éléments $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ qui constitueront l'une d'entre elles s'exprimant rationnellement

et même *linéairement* à l'aide des éléments d'une solution particulière quelconque $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, sous la forme (1), le problème qui consiste à déterminer la solution complète du système formé par l'équation (2) et les relations ayant lieu entre les φ s'appelle, d'après M. Klein, un *problème de Galois*. Un tel problème admettra pour *résolvante* l'équation $h_\mu(z, J) = 0$; la résolvante $h_\mu = 0$ étant entièrement résolue, la résolution *complète* du problème de Galois ne s'en suivra pas ; mais elle sera rendue moins difficile, car on connaîtra la valeur numérique de certaines fonctions de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$.

Revenons maintenant aux groupes γ_i . Les résolvantes de l'équation modulaire qui leur correspondent sont résolvantes de certains problèmes de Galois, dans le sens indiqué tout à l'heure ; il est intéressant d'étudier ces problèmes de Galois.

L'ordre ν du problème de Galois, qui correspond à l'un des groupes γ_i , est un multiple de l'ordre du groupe de monodromie de la résolvante correspondante. Or, pour chacune de ces résolvantes le groupe de monodromie nous est connu. Il est engendré par la combinaison et la répétition des trois substitutions s, t, u caractéristiques des surfaces de Riemann f (voir § 19, p. 62) entre lesquelles a lieu la relation $s t u = 1$. Cette relation fondamentale entre les substitutions génératrices n'est pas la seule. En effet, le groupe de monodromie peut être considéré comme engendré par les deux substitutions s, t qui satisfont, comme nous l'avons vu, aux relations :

$$s^{11} = 1, \quad t^2 = 1, \quad (st)^3 = 1.$$

S'il n'y avait pas d'autres relations entre s, t , le groupe ainsi engendré serait isomorphe holoédrique avec le groupe $G_{\{u\}}$, analogue au $G_{\{n\}}$ du § 13, et cela en vertu d'un théorème de M. Walther Dyck déjà employé (§ 13). Or le $G_{\{n\}}$ est toujours d'ordre infini si $n \geq 6$, et le groupe de monodromie est d'ordre au plus égal à

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11 = 11 !$$

Bien que les dix groupes de monodromie relatifs aux surfaces f_i soient parfaitement définis par leurs substitutions génératrices,

il est impossible d'indiquer les relations qui ont lieu entre ces génératrices.

Il paraît même difficile de fixer d'une manière précise, sauf pour le cas des surfaces f_1 et f'_1 l'ordre de ces groupes de monodromie, et par suite la valeur de ν . Mais on peut sans difficulté déterminer pour ν une limite inférieure et une limite supérieure, qui suffisent pour les conclusions qu'on veut établir.

Γ_ν étant, dans le cas actuel, un sous-groupe invariant de classe 11 du groupe modulaire, on a (§ 9, page 26) entre son indice ν et son genre p , la relation

$$12np + \nu(6 - n) = 12n,$$

si $n = 11$, qui s'écrit encore

$$5\nu = 12.11(p - 1).$$

ν étant entier, on a nécessairement $p = 5h + 1$, h étant entier positif quelconque et par suite

$$\nu = 12.11h.$$

ν est donc toujours divisible par 12.

D'autre part ν , contient comme facteur l'ordre du groupe de monodromie correspondant, et l'on sait, d'après un théorème de Cauchy, fondamental dans la théorie des groupes, que, si un groupe d'ordre fini contient une substitution de période r , son ordre est divisible par l'entier r ; de sorte que, si $r_1, r_2, r_3, \dots$, sont les périodes d'opérations contenues dans le groupe de monodromie, ν sera aussi divisible par le plus petit commun multiple des nombres r_1, r_2, r_3 . Il est facile d'obtenir, dans chaque cas, des opérations de périodes très-différentes et de fixer d'après cela une limite inférieure pour ν . Il est à remarquer que les dix groupes de monodromie sont tous composés de permutations paires et sont, par conséquent, contenus dans le groupe alterné relatif aux permutations de onze objets.

Je réunis sous forme de tableau les substitutions qui, pour chaque surface f , permettent de fixer la limite inférieure. Dans ce tableau sont indiqués la nature de la substitution, celle de ses cycles, sa

période, l'indice minimum ν et le genre minimum p ; en outre, le tableau ne contient les éléments en question que pour les surfaces $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$; ceux relatifs aux surfaces f'_1, f'_2, f'_3, f'_6 se déduisent aussitôt de ceux relatifs à f_1, f_2, f_3, f_6 si l'on remarque que les surfaces f_1, f'_1, f_2 et f'_2, f_3 et f'_3, f_6 et f'_6 sont symétriques l'une de l'autre.

SURFACE f_1 (groupes $\gamma_1, \gamma_1^{(a)}$).

$s = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$	période 11,
$t = (1, 8)(2, 3)(4, 7)(10, 11)5, 6, 9$	» 2,
$ts^3 = (1, 11, 2, 6, 9)(3, 5, 8, 4, 10)7$	» 5,
$ts^5 = (1, 2, 8, 6, 11, 4)(3, 7, 9)(5, 10)$	» 6.

Indice : Minimum de $\nu = 11 \times 12 \times 5 = 660$.

Genre : Minimum de $p = 26$.

Le groupe Γ_ν est dans ce cas le groupe congruent fondamental du onzième rang pour lequel on a effectivement $\nu = 660$.

SURFACE f_2 (groupes $\gamma_2, \gamma_2^{(a)}$).

$s = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$	période 11,
$t = (1, 2)(3, 10)(4, 7)(8, 9), 5, 6, 11$	» 2,
$ts^3 = (1, 5, 8)(2, 4, 10, 6, 9, 11, 3), 7$	» 21,
$ts^4 = (1, 6, 10, 7, 8, 2, 5, 9)(4, 11), 3$	» 8,
$ts^4 ts^5 ts^4 = (1, 4, 9, 8, 10)(2, 7, 3, 11, 6), 5$	» 5.

Minimum de l'indice ν : $\nu = 2 \times 12 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$.

— du genre p : $p = 351$.

SURFACE f_3 (groupes γ_3 et $\gamma_3^{(a)}$).

$s = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$	période 11,
$t = (1, 7)(3, 6)(8, 9)(10, 11), 2, 4, 5$	» 2,
$ts^3 = (1, 10, 3, 9, 11, 2, 5, 8)(4, 7), 6$	» 8,
$ts^3 ts^4 ts^5 = (1, 9, 11, 8, 4, 10, 5, 7, 3)2, 6$	» 9,
$ts^3 ts^4 ts^3 = (1, 7)(2, 11, 6, 4, 8)(3, 10)(5, 9)$	» 10.

Minimum de l'indice ν : $\nu = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 12 = 3960$.

— du genre p : $p = 151$.

SURFACE f_4 (groupe γ_4).

$$\begin{aligned} s &= (1, 2, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) && \text{période } 11, \\ t &= (1, 5)(2, 3)(7, 11)(9, 10), 4, 6, 8 && \text{» } 2, \\ ts^4 &= (1, 9, 3, 6, 10, 2, 7, 4, 8), 5, 11 && \text{» } 9, \\ ts^5 &= (1, 10, 3, 7, 5, 6, 11)(2, 8)(4, 9) && \text{» } 14, \\ ts^4 ts^5 ts^4 &= (1, 8, 2, 5, 10)(3, 11, 9, 4, 7), 6 && \text{» } 5. \end{aligned}$$

Minimum de l'indice ν : $\nu = 11 \times 12 \times 3 \times 5 = 13860$.

— du genre p : $p = 526$.

SURFACE f_5 (groupe γ_5).

$$\begin{aligned} s &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) && \text{période } 11, \\ t &= (3, 4)(1, 5)(7, 11)(8, 9), 6, 10, 2 && \text{» } 2, \\ ts^3 &= (1, 8)(2, 5, 4, 6, 9, 11, 10)(3, 7) && \text{» } 14, \\ ts^4 &= (1, 9)(2, 6, 10, 3, 8)(4, 7)(5, 11) && \text{» } 10. \end{aligned}$$

Minimum de l'indice ν : $\nu = 11 \times 12 \times 7 \times 5 = 4620$.

— du genre p : $p = 176$.

SURFACE f_6 (groupe γ_6).

$$\begin{aligned} s &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 9, 10, 11) && \text{période } 11, \\ t &= (1, 5)(3, 4)(7, 11)(9, 10), 2, 6, 8 && \text{» } 2, \\ ts^3 &= (1, 8, 11, 10)(2, 5, 4, 6, 9)(3, 7) && \text{» } 20, \\ ts^3 ts^3 &= (1, 2, 6, 4, 11, 3, 5, 8)(7, 9), 10 && \text{» } 8. \end{aligned}$$

Minimum de l'indice ν : $\nu = 2 \times 5 \times 11 \times 12 = 1320$.

— du genre p : $p = 51$.

Déterminons maintenant la valeur maximum de ν . Le groupe Γ_ν est, comme on sait, le groupe commun aux 11 groupes semblables à γ_i d'indice 11. D'autre part on sait que l'indice du groupe commun à deux sous-groupes Γ_λ , Γ_μ du groupe modulaire (λ, μ étant finis) est $\leq \lambda\mu$. Donc ν sera $\leq 11^{11}$. Mais, comme ν est divisible par 12, la valeur maximum de ν sera égale au plus grand multiple de 12 contenu dans 11^{11} ; c'est un nombre considérable.

Si l'on met à part le cas des surfaces f_1 et f'_1 , on voit que les problèmes de Galois, qui correspondent aux surfaces $f_2, f'_2, \dots, f'_6$, sont de degrés très élevés. Dans le cas d'un groupe γ_i ou d'une surface f_i , la connaissance complète des propriétés du groupe Γ_v permet, comme on l'a vu plus haut, d'obtenir le développement en série, procédant suivant les puissances de $r = e^{2\pi i \omega}$, du module t qui figure dans la résolvante :

$$J : J - 1 : 1 = \Phi(t) : \chi(t) : \Psi(t).$$

Ce développement, valable dans le voisinage du point $\omega = i\infty$, nous serait de la plus grande utilité pour le calcul définitif des coefficients de la résolvante en fonction de λ et μ . Mais il est des plus pénibles à obtenir, même dans le cas où Γ_v est parfaitement connu, ce qui est loin d'être ici le cas ; il serait, en effet, nécessaire d'obtenir l'expression de t à l'aide des fonctions φ_i , et d'introduire ensuite dans cette expression les développements en série des fonctions φ_i en fonction de r dans le voisinage du point $\omega = \infty$; le nombre des fonctions φ_i est p ; et, comme p est, dans tous les cas, supérieur ou au moins égal à 51, on voit aussitôt à quels calculs considérables on serait conduit. En somme, le calcul des coefficients de la résolvante par cette méthode ne peut réussir : 1° parce que l'on ne connaît pas de loi arithmétique simple pour définir les substitutions du groupé γ_i et du groupe Γ_v ; 2° à cause de la grandeur du nombre v et du genre élevé de la surface de Riemann qui correspond à Γ_v .

§ 26. — Conclusion.

Les paragraphes 22 à 25 inclus montrent la marche que l'on doit suivre dans l'étude d'un sous-groupe défini par son polygone fondamental. Les résultats, négatifs pour la plupart, que nous avons obtenus pour les groupes γ_i , dont la constitution est relativement simple, indiquent suffisamment combien est complexe l'étude complète d'un sous-groupe, défini par son polygone fondamental, aussitôt que la constitution de ce groupe devient un peu compliquée ; par

exemple, lorsque le nombre des doubles triangles qui composent le polygone fondamental est un peu grand.

La plupart des cas traités jusqu'à présent sont relatifs à des groupes congruents, c'est-à-dire dont les substitutions satisfont à certaines conditions arithmétiques, exprimées par des congruences dans le premier membre desquelles figurent certaines fonctions des coefficients des substitutions, le modulè de ces congruences étant un nombre déterminé ; et c'est grâce à des artifices fondés sur la nature arithmétique des substitutions qu'on a pu dans ces cas-là, et la plupart du temps par une voie détournée, obtenir la solution complète de la question.

L'idée de définir un sous-groupe du groupe modulaire par son polygone fondamental, qui est la base de tout ce travail, est due à M. Klein qui l'a exposée et développée dans divers mémoires insérés dans le vol. XIV des *Mathematische Annalen* (1878) et dans une note, *Beitrag zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Münchener Berichten*, décembre 1879. Quant à la notion de *domaine fondamental*, dont M. Klein en Allemagne, et M. Poincaré en France, ont fait un si bel usage, elle est due à M. Dedekind, qui l'a rencontrée à propos du groupe modulaire, dans ses beaux travaux sur les formes quadratiques du deuxième degré à coefficients entiers (*Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Journal de Crelle*, vol. LXXXIII, 1877). Il est bon de rappeler ici que le lien qui existe entre la théorie des groupes et certaines divisions en domaines tracées sur une surface n'avait pas échappé à M. Camille Jordan (voir *Recherches sur les polyèdres, Journal de Crelle*, vol. LVI et LXVIII); comme au fond cette correspondance ne diffère pas de la notion du polygone fondamental d'un groupe, on peut dire que le germe de cette notion se trouve dans le travail de M. Camille Jordan.

Les nombreux mémoires de M. Klein et de ses élèves sur le groupe modulaire et ses sous-groupes, sur les résolvantes de l'équation modulaire et sur les applications arithmétiques et géométriques qu'on peut en faire, n'ont provoqué en France l'apparition

que d'un nombre très restreint de travaux. J'en excepte, bien entendu, les belles théories de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes, kleinéennes, etc., qui, quoique faisant usage de la notion de domaine fondamental, sont exclusivement analytiques, et ont une portée beaucoup plus générale, puisqu'elles s'appliquent à toute une série de fonctions qui demeurent invariables lorsqu'on effectue sur leur argument une substitution d'un groupe discontinu quelconque.

L'étude du groupe modulaire, telle qu'elle a été comprise par les géomètres allemands, touche d'ailleurs à toutes les branches de l'Analyse Mathématique moderne : théorie des équations différentielles, représentation conforme, théorie des substitutions et des groupes, des fonctions algébriques d'après Riemann, théorie des invariants, théorie des nombres, etc.

Ce sont là les raisons qui m'ont décidé à réunir dans ce travail les idées générales essentielles émises par M. Klein dans l'étude du groupe modulaire, et à en faire une application qui, ne comportant aucun développement arithmétique, permette de juger des difficultés d'application des théories générales à des cas relativement simples.

Vu et approuvé :

Paris, le 7 décembre 1895,

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer.

Paris, le 7 décembre 1895,

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Exposer les recherches récentes relatives à l'étude des lignes tracées sur les surfaces.

Vu et approuvé :

Paris, le 7 décembre 1895,

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer.

Paris, le 7 décembre 1895.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

